超双曲型方程

凌岭 著

西北大学出版社

超双曲型方程

凌 岭 著

（中国科学院科学基金资助的课题）

西 北 大 学 出 版 社

超 双 曲 型 方 程

凌 岭 著

西北大学出版社出版发行
(西安市太白路)
陕西省新华书店经销
西安交通大学印刷厂印刷
787×1092毫米 1/32　　印张 8　　字数 167 千字
1987 年 4 月第 1 版　　1987 年 4 月第 1 次印刷
印数：1——3500
ISBN 7－5604－0003－5/o·1

统一书号：13320·10　定价：2.00元

序

迄今力学物理和其他科技部门，还没有提出过超双曲型方程，多元复变函数论里，出现大量这类方程，只是我国学者才首次注意这点。

这类方程具有的 Asgeirsson 公式却有明显而重要的应用。Asgeirsson 公式不仅可用以简捷地解决波动方程的柯西问题和特征问题，并且可用以证明超双曲型方程解的某种奇特的延拓性，从而系统并深刻地证明了所有已知并重要的定解问题不适定性。这种奇特的延拓性，揭示了多元实变函数所特有的性质，丰富了多元实变数函数论；由于多元复变函数也具备某种奇特的解析延拓性，这又透露了超双曲型方程和多复变函数论之间的深切关系。

但过去对 Asgeirsson 公式的证明，都是验证性的，好象离线性偏微分方程一般理论而孤处一隅。在“关于超双曲型方程的基本解与 Asgeirsson 定理”等文中凌岭同志和耿光、朱钤等同志一起把超双曲型方程的基本解代入基本公式，取定适当的积分区域则两端都出现发散积分；他们取这些发散积分的有限部分，应用了 Bureau 等人的结果证明了有关的超双曲型方程的所有解的球面中量满足某著名的 Euler-Poisson 方程，从而证明了 Asgeirsson 公式。这样他们不仅把超双曲型方程的研究纳入了阿达玛的理论之中，并且把某种奇特延拓性纳入了该理论之中。

本世纪三十年代，阿达玛在考虑波动方程在时向平面上的柯西问题时，证明了要问题有解，所给数据必需满足三个条件，同时也是充分条件，阿达玛当时并不满意这个结果。首先，条件太烦，甚至不知是否彼此独立。而更不令人满意的则是没有反映在Lorentz群的某一子群下的不变性。而上述奇特延拓性中的对合特征锥刚巧是在这个子群下不变的；不仅如此，阿达玛在考虑不适定性时早已注意到不适定性和解析延拓的密切关系。所以可说阿达玛早已提供了奇特延拓性的基础，唯一缺陷则是Asgeirsson定理的证明。经过凌岭等同志的努力，这个缺陷也就被弥补了。

超双曲型方程有没有解呢？基本解就是一个。通过Cauchy-Kowalewski定理又可得无穷个解，但这些都是解析解。那末，有没有非解析解呢？在“超双曲型方程的广义势解的非解析性及延拓性”一文中，凌岭等同志用基本解建立广义势，证明了具有这类延拓性而非解析的超双曲型方程的解。大大扩大了具有这种延拓性的函数范围。

所以凌岭等同志的工作是带基本性的重要的，并大有发展余地：

1° 所有具有上述奇特延拓性的函数类，是否带某些群性？若f_1，f_2都具有这类延拓性则f_1+f_2，f_1f_2显然也具有这类延拓性。那末，当右端已与函数具有这个延拓性时，非齐次超双曲型方程的解是否也具有同样的延拓性呢？……

2° 超双曲型方程和多元复变函数论有密切的关系，那么是否可利用超双曲型方程的研究来推动多元复变函数论的发展呢？当然要开展这方面的工作需对过定组深入了解。

3° 更有意义的则是凌岭等同志所得结果，是否可推广

到非常系数超双曲型方程？为此，首先需对 Bruhat 有关工作，进行深入了解，把它应用到最简单的情况，这样才能得出结果，然后逐步推广。

……

综上所述，凌岭等同志的工作不仅丰富了超双曲型方程的研究，同时也给人以进一步探索的途径，给人深刻的印象：超双曲型方程的研究正处在蓬勃发展的前夕。由凌岭同志撰写的这本书的出版，无疑将大大推动这个发展。这不仅对祖国线性偏微分方程定性研究的发展有好处，并且可以密切和多元函数论研究的联系，从而促进它的发展。

吴 新 谋

前　言

超双曲型方程的研究是线性偏微分方程定性研究* 的重要方向之一，国内外这方面的文献仅 40 余篇。本书是在多年来数学系选修课与研究生课《超双曲型方程》讲义的基础上写成的，注意吸收这方面的重要研究成果，特别是前三章相当部分是我们自己近期的工作。

本书共分五章。第一章讨论瑕积分的有限部分，为以后各章讨论作准备。第二、三章讨论超双曲型方程的解的中量定理、推广与应用，重视通过基本解、基本公式的思想处理问题。第四章讨论超双曲型方程主要境界值问题。第五章讨论超双曲算子，包括七十年代以来这方面的一些工作。

本书可作为综合大学、高等师范院校及工科院校各数学专业选修课与研究生课选用，也可供从事超双曲型方程研究的人员参考。

由于我们水平限制，书中的缺点或错误在所难免，殷切期望给予批评指正。

本书的完成，得到了朱钤、耿光等同志的协助，特表感谢。

凌　岭　谨识

一九八五年三月

---

* 中国科学院科学基金资助的课题。

目　　录

第一章 瑕积分的有限部分

§1. 单积分的有限部分

1.有限部分的引出

在微分方程的研究中，经常遇到瑕积分的求微商问题，这个问题一般是困难的，但如果解决得恰当，则于研究问题有帮助。

以著名的欧拉一波阿松方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}-\frac{\beta'}{x-y}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\beta}{x-y}\frac{\partial u}{\partial y}=0 \qquad (0<\beta,\beta'<1)$$

为例，它的解由波阿松公式表出为

$$u(x,y)=\int_y^x \Phi(\alpha)(x-\alpha)^{-\beta}(\alpha-y)^{-\beta'}d\alpha+$$

$$+(x-y)^{1-\beta-\beta'}\int_y^x \Psi(\alpha)(x-\alpha)^{\beta'-1}(\alpha-y)^{\beta-1}d\alpha.$$

当我们要进行综合过程时，就发生了困难。例如上公式第一个积分，对x求微商时，我们形式地有

$$[\Phi(\alpha)(x-\alpha)^{-\beta}(\alpha-y)^{-\beta'}]_{\alpha=x}-$$

$$-\beta\int_y^x \Phi(\alpha)(x-\alpha)^{-\beta-1}(\alpha-y)^{-\beta'}d\alpha, \qquad (1)$$

第一项显然不定义，而第二项积分是发散的。

以前我们克服困难的办法是先假定Φ有一阶连续微商，

而后在原积分中作变换 $\alpha=y+(x-y)t$，则原积分变为

$$(x-y)^{1-\beta-\beta'}\int_0^1 \Phi[y+(x-y)t](1-t)^{-\beta}t^{-\beta'}dt,$$

这样，就可对 x 求微商了。

当然，也可以利用部分积分法来克服上述的困难。

问题是有没有更自然的方法来解决这个问题？阿达玛注意到：(1)本身虽无意义，但

$$\lim_{\alpha\to x}\Big\{\Phi(\alpha)(x-\alpha)^{-\beta}(\alpha-y)^{-\beta'}-$$
$$-\beta\int_y^\alpha \Phi(\alpha)(x-\alpha)^{-\beta-1}(\alpha-y)^{-\beta'}d\alpha\Big\}$$

却是完全确定的。这个极限刚巧就是所求微商之值，阿达玛把这极限值叫做瑕积分

$$-\beta\int_y^x \Phi(\alpha)(x-\alpha)^{-\beta-1}(\alpha-y)^{-\beta'}d\alpha$$

的有限部分而以

$$\mathrm{Pf}\Big\{-\beta\int_y^x \Phi(\alpha)(x-\alpha)^{-\beta-1}(\alpha-y)^{-\beta'}d\alpha\Big\}$$

来表示，则有

$$\frac{\partial}{\partial x}\int_a^x \Phi(\alpha)(x-\alpha)^{-\beta}(\alpha-y)^{-\beta'}d\alpha=$$
$$=\mathrm{Pf}\int_a^x \frac{\partial}{\partial x}\Phi(\alpha)(x-\alpha)^{-\beta}(\alpha-y)^{-\beta'}d\alpha.$$

2. 定义

定理 设 $A(x)$ 在 b 附近有 p 阶微商；而 $0<\mu<1$，则必能求得一函数 $B(x)$ 在 b 附近有 p 阶微商，使

$$\lim_{x\to b}\left[\int_a^x \frac{A(x)dx}{(b-x)^{p+\mu}}+\frac{B(x)}{(b-x)^{p+\mu-1}}\right]$$

存在，而这极限值与$B(x)$无关。

证： 由假设$A(x)$既在b附近有p阶微商，则有

$$A(x)=A(b)-A'(b)(b-x)+\frac{A''(b)}{2!}(b-x)^2+\cdots+$$

$$+(-1)^{p-1}\frac{A^{(p-1)}(b)}{(p-1)!}(b-x)^{p-1}+$$

$$+(-1)^p\frac{A^{(p)}(\theta)}{p!}(b-x)^p,$$

其中θ是包含在b和x间的一个数。显然，我们可以写

$$\int_a^x\frac{A(x)dx}{(b-x)^{p+\mu}}+\frac{B(x)}{(b-x)^{p+\mu-1}}=$$

$$=\int_a^x\frac{A(x)-\left[A(b)-A'(b)(b-x)+\cdots+\frac{(-1)^{p-1}}{(p-1)!}A^{(p-1)}(b)(b-x)^{p-1}\right]}{(b-x)^{p+\mu}}dx+$$

$$+\int_a^x\frac{A(b)-A'(b)(b-x)+\cdots+\frac{(-1)^{p-1}}{(p-1)!}A^{(p-1)}(b)(b-x)^{p-1}}{(b-x)^{p+\mu}}dx+$$

$$+\frac{B(x)}{(b-x)^{p+\mu-1}}.$$

因之若取

$$B(x)=-\frac{A(b)}{p+\mu-1}+\frac{A'(b)}{p+\mu-2}(b-x)+\cdots+$$

$$+\frac{(-1)^pA^{(p-1)}(b)}{(p-1)!\mu}(b-x)^{p-1},$$

则有

$$\int_a^x \frac{A(x)dx}{(b-x)^{p+\mu}}+\frac{B(x)}{(b-x)^{p+\mu-1}}=$$
$$=-\frac{A(b)}{(p+\mu-1)(b-a)^{p+\mu-1}}+\cdots+$$
$$+\frac{(-1)^p A^{(p-1)}(b)}{(p-1)!\mu(b-a)^{\mu}}+\int_a^x \frac{A_1(x)dx}{(b-x)^{p+\mu}}, \qquad (2)$$

这里

$$A_1(x)=A(x)-\Big[A(b)-A'(b)(b-x)+\cdots+$$
$$+\frac{(-1)^{p-1}}{(p-1)!}A^{(p-1)}(b)(b-x)^{p-1}\Big].$$

两端命 x 趋于 b，则有

$$\lim_{x\to b}\left\{\int_a^x \frac{A(x)dx}{(b-x)^{p+\mu}}+\frac{B(x)}{(b-x)^{p+\mu-1}}\right\}=$$
$$=-\frac{A(b)}{(p+\mu-1)(b-a)^{p+\mu-1}}+$$
$$+\frac{A'(b)}{(p+\mu-2)(b-a)^{p+\mu-2}}+\cdots+$$
$$+\frac{(-1)^{p-1}A^{(p-1)}(b)}{(p-1)!\mu(b-a)^{\mu}}+\int_a^b \frac{A_1(x)dx}{(b-x)^{p+\mu}}. \qquad (3)$$

当然，我们也必需这样取台劳展式的前 p 项，但又须注意它的 $p+1$ 项以后的选择则显然与这极限无关。

定义 极限(3)称为瑕积分

$$\int_a^b \frac{A(x)dx}{(b-x)^{p+\mu}}$$

的有限部分，记为

$$\mathrm{Pf}\int_a^b \frac{A(x)dx}{(b-x)^{p+\mu}}。$$

由上可见

$$\mathrm{Pf}\int_a^b \frac{A(x)dx}{(b-x)^{p+\mu}}=$$

$$=-\sum_{i=1}^{p}\frac{(-1)^{i-1}}{(i-1)!}\ \frac{A^{(i-1)}(b)}{(p+\mu-i)(b-a)^{p+\mu-i}}+$$

$$+\int_a^b \frac{A_1(x)dx}{(b-x)^{p+\mu}}.$$

当 $A(x)\equiv 1$ 时，

$$\mathrm{Pf}\int_a^b \frac{dx}{(b-x)^{p+\mu}}=$$

$$=\lim_{x\to b}\left[\int_a^x \frac{dx}{(b-x)^{p+\mu}}+\frac{B(x)}{(b-x)^{p+\mu-1}}\right].$$

显然，若积分原来有意义，则我们可以取 $B(x)\equiv 0$，而它的有限部分就是它自身。在这个意义下，瑕积分的有限部分，可以看成积分的直接推广。

3.主要性质

性质 1 若 $a<c<b$，则

$$\mathrm{Pf}\int_a^b=\mathrm{Pf}\int_a^c+\mathrm{Pf}\int_c^b.$$

这个性质的成立是显然的。特别，当上下限都是奇点时会带来方便。

性质 2 若 $f'(b)\neq 0$，则可在 $\mathrm{Pf}\int_a^b$ 内作变换

$$t=f(x),$$

因为(2)的两端可以作此代换；由 $f'(b)$ 非零，所以当取极限时，(2)的各项的无穷大的阶数不变。

性质 3 若 $A(x)$ 有 $p+1$ 阶微商，则有

$$\frac{\partial}{\partial b}\operatorname{Pf}\int_a^b \frac{A(x)dx}{(b-x)^{p+\mu}}=\operatorname{Pf}\int_a^b \frac{\partial}{\partial b}\frac{A(x)}{(b-x)^{p+\mu}}dx.$$

证：由（3）和

$$\frac{(-1)^p A^{(p)}(\theta)(b-x)^p}{p!}=\frac{(-1)^p A^{(p)}(b)(b-x)^p}{p!}+$$

$$+\frac{(-1)^{p+1}A^{(p+1)}(\theta_1)(b-x)^{p+1}}{(p+1)!}$$

得

$$\operatorname{Pf}\int_a^b \frac{A(x)}{(b-x)^{p+\mu}}dx=$$

$$=-\sum_{i=1}^{p+1}\frac{(-1)^{i-1}A^{(i-1)}(b)}{(p+\mu-i)(i-1)!(b-a)^{p+\mu-i}}+$$

$$+\frac{(-1)^{p+1}}{(p+1)!}\int_a^b \frac{A^{(p+1)}(\theta_1)(b-x)^{p+1}}{(b-x)^{p+\mu}}dx,$$

因之

$$\frac{\partial}{\partial b}\operatorname{Pf}\int_a^b \frac{A(x)dx}{(b-x)^{p+\mu}}=$$

$$=-\sum_{i=1}^{p+1}\frac{(-1)^{i-1}}{(p+\mu-i)(i-1)!}\frac{\partial}{\partial b}\frac{A^{(i-1)}(b)}{(b-a)^{p+\mu-i}}+$$

$$+\frac{(-1)^{p+1}}{(p+1)!}\int_a^b \frac{\partial}{\partial b}\left[\frac{A^{(p+1)}(\theta_1)(b-x)^{p+1}}{(b-x)^{p+\mu}}\right]dx.$$

但

$$\frac{(-1)^{p+1}}{(p+1)!}A^{(p+1)}(\theta_1)(b-x)^{p+1}=$$

$$=A(x)-\sum_{i=1}^{p+1}\frac{(-1)^{i-1}A^{(i-1)}(b)}{(i-1)!}(b-x)^{i-1},$$

故

$$\frac{(-1)^{p+1}}{(p+1)!}\frac{\partial}{\partial b}(A^{(p+1)}(\theta_1)(b-x)^{p+1})=$$
$$=\frac{(-1)^{p+1}}{p!}A^{(p+1)}(b)(b-x)^p,$$

于是

$$\frac{\partial}{\partial b}\mathrm{Pf}\int_a^b\frac{A(x)dx}{(b-x)^{p+\mu}}=$$
$$=-\sum_{i=1}^{p+1}\frac{(-1)^{i-1}}{(p+\mu-i)(i-1)!}\frac{\partial}{\partial b}\frac{A^{(i-1)}(b)}{(b-a)^{p+\mu-i}}+$$
$$+\frac{(-1)^{p+1}}{(p+1)!}\int_a^b\frac{(-p-\mu)A^{(p+1)}(\theta_1)}{(b-x)^p}dx+$$
$$+\frac{(-1)^{p+1}}{p!}\int_a^b\frac{A^{(p+1)}(b)}{(b-x)^p}dx=$$
$$=\frac{(-1)^p(p+\mu)}{(p+1)!}\int_a^b\frac{A^{(p+1)}(\theta_1)}{(b-x)^\mu}dx+$$
$$+(p+\mu)\sum_{i=2}^{p+1}\frac{(-1)^{i-1}A^{(i-1)}(b)}{(p+\mu-i+1)(i-1)!(b-a)^{p+\mu-i+1}}+$$
$$+\frac{A(b)}{(b-a)^{p+\mu}}+\frac{(-1)^{p+1}A^{(p+1)}(b)}{(\mu-1)p!(b-a)^{\mu-1}}+$$
$$+\frac{(-1)^{p+1}A^{(p+1)}(b)}{(1-\mu)p!(b-a)^{\mu-1}}=$$
$$=\frac{(-1)^p(p+\mu)}{(p+1)!}\int_a^b\frac{A^{(p+1)}(\theta_1)}{(b-x)^\mu}dx+$$
$$+(p+\mu)\sum_{i=1}^{p+1}\frac{(-1)^{i-1}A^{(i-1)}(b)}{(p+\mu-i+1)(i-1)!(b-a)^{p+\mu-i+1}}=$$
$$=-(p+\mu)\,\mathrm{Pf}\int_a^b\frac{A(x)dx}{(b-x)^{p+\mu+1}}=$$
$$=\mathrm{Pf}\int_a^b\frac{\partial}{\partial b}\frac{A(x)}{(b-x)^{p+\mu}}dx.$$

性质 4 设 $f(x)$ 在 b 点附近有 $p+1$ 阶微商，而且 $f(b)=0$，则

$$\mathrm{Pf}\int_a^b \frac{f'(x)dx}{(b-x)^{p+\mu}}=$$

$$=\frac{-f(a)}{(b-a)^{p+\mu}}-(p+\mu)\,\mathrm{Pf}\int_a^b \frac{f(x)dx}{(b-x)^{p+\mu+1}}.$$

证：由有限部分的定义，只需找一个在 b 点附近有 p 阶微商的函数 $B(x)$，使得

$$\lim_{x\to b}\left[\int_a^x \frac{f'(x)dx}{(b-x)^{p+\mu}}+\frac{B(x)}{(b-x)^{p+\mu-1}}\right]$$

存在且等于

$$\frac{-f(a)}{(b-a)^{p+\mu}}-(p+\mu)\,\mathrm{Pf}\int_a^b \frac{f(x)dx}{(b-x)^{p+\mu+1}}.$$

对 $a<x<b$，则有

$$\int_a^x \frac{f'(x)dx}{(b-x)^{p+\mu}}=\frac{f(x)}{(b-x)^{p+\mu}}-(p+\mu)\int_a^x \frac{f(x)dx}{(b-x)^{p+\mu+1}}.$$

由于 $f(b)=0$，故有

$$f(x)=f'(b)(b-x)+\cdots+\frac{(-1)^p}{p!}f^{(p)}(b)(b-x)^p+$$

$$+\frac{(-1)^{p+1}}{(p+1)!}f^{(p+1)}(\theta)(b-x)^{p+1}.$$

取 $B(x)=B_1(x)+B_2(x)$，其中

$$B_1(x)=f'(b)-\frac{f''(b)}{2!}(b-x)+\cdots+$$

$$+(-1)^{p-1}\frac{f^{(p-1)}(b)}{p!}(b-x)^{p-1},$$

$$B_2(x)=(p+\mu)\left[\frac{f'(b)}{p+\mu-1}-\frac{f''(b)(b-x)}{2!(p+\mu-2)}+\cdots+\right.$$

$$+\frac{(-1)^{p-1}}{p!\,\mu}f^{(p)}(b)(b-x)^{p}\Big]$$

则有

$$\lim_{x\to b}\left[\int_a^x \frac{f'(x)dx}{(b-x)^{p+\mu}}+\frac{B_1(x)+B_2(x)}{(b-x)^{p+\mu-1}}\right]=$$

$$=\lim_{x\to b}\left[\frac{-f(a)}{(b-a)^{p+\mu}}-(p+\mu)\int_a^x \frac{f(x)dx}{(b-x)^{p+\mu+1}}+\right.$$

$$\left.+\frac{f(x)}{(b-x)^{p+\mu}}+\frac{B_1(x)+B_2(x)}{(b-x)^{p+\mu-1}}\right]=$$

$$=\frac{-f(a)}{(b-a)^{p+\mu}}+\lim_{x\to b}\left[\frac{f(x)}{(b-x)^{p+\mu}}+\frac{B_1(x)}{(b-x)^{p+\mu-1}}\right]$$

$$+\lim_{x\to b}\left[-(p+\mu)\int_a^x \frac{f(x)dx}{(b-x)^{p+\mu+1}}+\frac{B_2(x)}{(b-x)^{p+\mu-1}}\right]=$$

$$=\frac{-f(a)}{(b-a)^{p+\mu}}-(p+\mu)\,\mathrm{Pf}\int_a^b \frac{f(x)dx}{(b-x)^{p+\mu+1}}.$$

性质 5　设 $A(x,\ s)$是 p 阶连续可微函数，则

$$\mathrm{Pf}\int_a^b \frac{A(x,\ s)}{(b-x)^{p+\mu}}dx$$

是 s 的连续函数。

证： 由定义有

$$\mathrm{Pf}\int_a^b \frac{A(x,\ s)dx}{(b-x)^{p+\mu}}=$$

$$=\int_a^b \frac{A_1(x,s)}{(b-x)^{p+\mu}}dx-\sum_{i=1}^{p}\frac{(-1)^{i-1}}{(i-1)!}\frac{\frac{\partial^{i-1}}{\partial x^{i-1}}A(b,\ s)}{(p+\mu-i)(b-a)^{p+\mu-i}},$$

由假设 $\frac{\partial^{i-1}}{\partial x^{i-1}}A(b,s)$，$i=1,2,\cdots,\ p$ 都是 s 的连续函数，又

$$A_1(x,s)=A(x,s)-\sum_{i=1}^{p}\frac{(-1)^{i-1}}{(i-1)!}\frac{\partial^{i-1}}{\partial x^{i-1}}A(b,s)(b-x)^{i-1}=$$

$$=\frac{(-1)^p}{p!}\frac{\partial^p}{\partial x^p}A(\theta,\ s)(b-x)^p,$$

故 $A_1(x,s($ 是 s 的连续函数，而且积分

$$\int_a^q\frac{A_1(x,\ s)}{(b-x)^{p+\mu}}dx$$

对 s 一致收敛，因而

$$\int_a^b\frac{A_1(x,\ s)}{(b-x)^{p+\mu}}dx$$

是 s 的连续函数，故

$$\mathrm{Pf}\int_a^b\frac{A(x,\ s)}{(b-x)^{p+\mu}}ds$$

是 s 的连续函数。

这类瑕积分有关等式的性质，都完全保留。性质 5 中瑕积分的有限部分的关于 s 的可积性、可微性，都是成立的。特别指出：有关不等式的性质，则应十分注意。由 $A(x)$ 在积分间隔内的符号，我们并不能对 $\mathrm{Pf}\int_a^b$ 的符号作任何直接猜测。对于积分有限部分的估值也较复杂。由(3)显然有

$$\left|\mathrm{Pf}\int_a^b\right|\leqslant\frac{|A(b)|}{(p+\mu-1)(b-a)^{p+\mu-1}}+\frac{|A'(b)|}{(p+\mu-2)(b-a)^{p+\mu-2}}+$$

$$+\cdots+\frac{|A^{(p-1)}(b)|}{(p-1)!\mu(b-a)^{\mu}}+\frac{(A_p)(b-a)^{1-\mu}}{(1-\mu)p!},$$

其中 (A_p) 是 A 的 p 阶微商的绝对值在 $[a,\ b]$ 上的上界。因此如果我们知道了积分区间的长度，A 的前 $p-1$ 阶微商在 b 处的模的上界，及 A 的 p 阶微商的绝对值在 $[a,\ b]$ 上的上界，就可以得到积分有限部分的估计。我们有

性质 6 有限部分对 $A(x)$ 说，是一个 p 级连续泛函，即若任意给定 $\varepsilon>0$，我们必能求得 $\delta>0$，使当

$$|A-\bar{A}|<\delta,\ |A'-\bar{A}'|<\delta,\ \cdots,\ |A^{(p)}-\bar{A}^{(p)}|<\delta$$

时，就有

$$\left|\operatorname{Pf}\int_a^b \frac{A(x)-\bar{A}(x)}{(b-x)^{p+\mu}}dx\right|<\varepsilon.$$

上述单瑕积分可看作呈分数阶无穷的瑕积分。对呈整数阶无穷的情形，也能定义其有限部分。

§ 2 呈整数阶无穷的瑕积分

1. 定义

定理 设 $A(x)$ 在 b 附近有 p 阶微商，则必能求得 $B(x)$ 与 $B_1(x)$ 在 b 附近有 p 阶微商，使

$$\lim_{x\to b}\left[\int_a^x \frac{A(x)dx}{(b-x)^p}+\frac{B(x)}{(b-x)^{p-1}}+B_1(x)\ \log(b-x)\right]$$

存在，而这极限值与 $B(x)$，$B_1(x)$ 无关。

证：由假设 $A(x)$ 既在 b 附近有 p 阶微商，则有

$$A(x)=A(b)-A'(b)(b-x)+\frac{A''(b)}{2!}(b-x)^2+\cdots+$$

$$+(-1)^{p-1}\frac{A^{(p-1)}(b)}{(p-1)!}(b-x)^{p-1}+$$

$$+(-1)^p\frac{A^{(p)}(\theta)}{p!}(b-x)^p,$$

其中 θ 是包含在 b 和 x 间的一个数。显然，我们可以写

$$\int_a^x \frac{A(x)dx}{(b-x)^p}+\frac{B(x)}{(b-x)^{p-1}}+B_1(x)\log(b-x)=$$

$$=\int_a^x \frac{A(x)-\left[A(b)-A'(b)(b-x)+\cdots+\frac{(-1)^{p-1}}{(p-1)!}A^{(p-1)}(b)(b-x)^{p-1}\right]}{(b-x)^p}dx+$$

$$+\int_a^x \frac{A(b)-A'(b)(b-x)+\cdots+\frac{(-1)^{p-1}}{(p-1)!}A^{(p-1)}(b)(b-x)^{p-1}}{(b-x)^p}dx+$$

$$+\frac{B(x)}{(b-x)^{p-1}}+B_1(x)\log(b-x),$$

因之若取

$$B(x)=-\frac{A(b)}{p-1}+\frac{A'(b)}{p-2}(b-x)+\cdots+$$

$$+\frac{(-1)^{p-1}A^{(p-2)}(b)}{(p-2)!}(b-x)^{p-2},$$

$$B_1(x)=\frac{(-1)^{p-1}A^{(p-1)}(b)}{(p-1)!},$$

则有

$$\int_a^x\frac{A(x)dx}{(b-x)^p}+\frac{B(x)}{(b-x)^{p-1}}+B_1(x)\log(b-x)=$$

$$=-\frac{A(b)}{(p-1)(b-a)^{p-1}}+\cdots+\frac{(-1)^{p-1}A^{(p-2)}(b)}{(p-2)!}(b-a)+$$

$$+\frac{(-1)^{p-1}A^{(p-1)}(b)}{(p-1)!}\log(b-a)+\int_a^x\frac{A_1(x)dx}{(b-x)^p},$$

这里

$$A_1(x)=A(x)-\left[A(b)-A'(b)(b-x)+\cdots+\right.$$

$$\left.+\frac{(-1)^{p-1}}{(p-1)!}A^{(p-1)}(b)(b-x)^{p-1}\right].$$

两端命 $x\to b$，则有

$$\lim_{x\to b}\left[\int_a^x \frac{A(x)dx}{(b-x)^p}+\frac{B(x)}{(b-x)^{p-1}}+B_1(x)\log(b-x)\right]=$$

$$=-\sum_{i=1}^{p-1}\frac{(-1)^{i-1}}{(i-1)!}\frac{A^{(i-1)}(b)}{(p-i)(b-a)^{p-i}}+$$

$$+\frac{(-1)^{p-1}A^{(p-1)}(b)}{(p-1)!}\log(b-a)+$$

$$+\int_a^b \frac{A_1(x)}{(b-x)^p}dx. \qquad (4)$$

定义 极限(4)称为瑕积分

$$\int_a^b \frac{A(x)dx}{(b-x)^p}$$

的有限部分，记为

$$\mathrm{Pf}\int_a^b \frac{A(x)}{(b-x)^p}.$$

这类瑕积分也具有§1中瑕积分相应的性质，以下仅指出主要的几个。

2. 主要性质

性质1 若 $A(x)$ 有 $p+1$ 阶微商，则有

$$\frac{\partial}{\partial a}\mathrm{Pf}\int_a^b \frac{A(x)dx}{(b-x)^p}=-\frac{A(a)}{(b-a)^p}.$$

证：由(4)得

$$\frac{\partial}{\partial a}\mathrm{Pf}\int_a^b \frac{A(x)dx}{(b-x)^p}=-\sum_{i=1}^{p-1}\frac{(-1)^{i-1}A^{(i-1)}(b)}{(p-i)(i-1)!}\frac{p-i}{(b-a)^{p+1-i}}+$$

$$+\frac{(-1)^{p-1}A^{(p-1)}(b)}{(p-1)!}\frac{(-1)}{b-a}-\frac{A_1(a)}{(b-a)^p}$$

$$=-\sum_{i=1}^{p}\frac{(-1)^{i-1}A^{(i-1)}(b)}{(i-1)!(b-a)^{p+1-i}}-\frac{A_1(a)}{(b-a)^p},$$

由于

$$A(x)=\sum_{i=1}^{p}\frac{(-1)^{i-1}A^{(i-1)}(b)(b-x)^{i-1}}{(i-1)!}+A_1(x),$$

$$\frac{A(a)}{(b-a)^p}=\sum_{i=1}^{p}\frac{(-1)^{i-1}A^{(i-1)}(b)(b-a)^{i-1}}{(i-1)!(b-a)^p}+\frac{A_1(a)}{(b-a)^p}$$

$$=\sum_{i=1}^{p}\frac{(-1)^{i-1}A^{(i-1)}(b)}{(i-1)!(b-a)^{p+1-i}}+\frac{A_1(a)}{(b-a)^p},$$

故得

$$\frac{\partial}{\partial a}\operatorname{Pf}\int_a^b\frac{A(x)dx}{(b-x)^p}=-\frac{A(a)}{(b-a)^p}.$$

性质 2 若 $A(x)$ 有 $p+1$ 阶微商，则有

$$\frac{\partial}{\partial b}\operatorname{Pf}\int_a^b\frac{A(x)}{(b-x)^p}dx=$$

$$=\operatorname{Pf}\int_a^b\frac{\partial}{\partial b}\frac{A(x)}{(b-x)^p}dx+\frac{(-1)^pA^{(p)}(b)}{p!}.$$

证： 由(4)有

$$\operatorname{Pf}\int_a^b\frac{A(x)dx}{(b-x)^p}=-\sum_{i=1}^{p-1}\frac{(-1)^{i-1}A^{(i-1)}(b)}{(i-1)!(p-i)(b-a)^{p-i}}+$$

$$+\frac{(-1)^{p-1}A^{(p-1)}(b)}{(p-i)!}\log(b-a)+$$

$$+\int_a^b\frac{A_1(x)}{(b-x)^p}dx,$$

因之，

$$\frac{\partial}{\partial b}\operatorname{Pf}\int_a^b\frac{A(x)dx}{(b-x)^p}=-\sum_{i=1}^{p-1}\frac{(-1)^{i-1}}{(i-1)!(p-i)}\frac{\partial}{\partial b}\frac{A^{(i-1)}(b)}{(b-a)^{p-i}}+$$

$$+\frac{(-1)^{p-1}}{(p-1)!}\frac{\partial}{\partial b}\left[A^{(p-1)}(b)\log(b-a)\right]+\frac{\partial}{\partial b}\int_a^b\frac{A_1(x)}{(b-x)^p}dx,$$

而

$$\frac{\partial}{\partial b}\int_a^b \frac{A_1(x)}{(b-x)}\ dx=\frac{\partial}{\partial b}\lim_{x\to b}\int_a^x \frac{A_1(x)}{(b-x)^p}dx=$$

$$=\frac{\partial}{\partial b}\lim_{x\to b}\int_a^x\left[\frac{(-1)^pA^{(p)}(b)}{p!}+\frac{(-1)^{p+1}A^{(p+1)}(\theta_1)(b-x)}{(p+1)!}\right]dx$$

$$=\frac{(-1)^pA^{(p)}(b)}{p!}+\frac{(-1)^{p+1}A^{(p+1)}(b)(b-a)(-p)}{(p+1)!},$$

不难得到

$$\frac{\partial}{\partial b}\,\mathrm{Pf}\int_a^b\frac{A(x)dx}{(b-x)^p}=\mathrm{Pf}\int_a^b\frac{\partial}{\partial b}\ \frac{A(x)}{(b-x)^p}dx+\frac{(-1)^pA^{(p)}(b)}{p!}.$$

性质 3 有限部分对 $A(x)$ 说是一个 p 级连续泛函。即若任给 $\varepsilon>0$，我们必能求得 $\delta>0$，使当

$$|A-\bar{A}|<\delta,\ |A'-\bar{A}'|<\delta,\ \cdots,\ |A^{(p)}-\bar{A}^{(p)}|<\delta$$

时就有

$$\left|\ \mathrm{Pf}\int_a^b\frac{A(x)-\bar{A}(x)}{(b-x)^p}dx\right|<\varepsilon.$$

§ 3 重积分的有限部分

阿达玛把上述单积分的有限部分概念推广到多重积分。考虑m维空间的体积分

$$\iint_T\cdots\int\frac{A(x_1,x_2,\cdots,x_m)}{G^{p+\frac{1}{2}}}dx_1dx_2\cdots dx_m,\tag{5}$$

这里积分域T的一部分边界S'为曲面

$$G(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_m)=0,$$

p是自然数。设在$G=0$上任一点，G的所有一阶偏微商不同时为零。我们讨论积分(5)是否有意义，必需考虑$G=0$附

近任一点到$G=0$上的距离。设此距离为d，则体积分

$$\iint_T\cdots\int\frac{A}{d^{p+\frac{1}{2}}}dx_1dx_2\cdots dx_m \qquad (5')$$

有意义与否，完全为p所确定，既假定p为自然数，则(5′)显然恒无意义。由于在$G=0$上任一点，G的所有一阶偏微商不同时为零，则$G=0$附近任一点$(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \cdots, \bar{x}_m)$到$G=0$的距离，就和$G(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \cdots, \bar{x}_m)$为同级无穷小，因此(5)当$p$为自然数时，恒无意义。

为了要给这个积分一个意义，先把T用曲面

$$G=\gamma(x_1, x_2, \cdots, x_m, \varepsilon) \qquad (\tau)$$

分为两部分T_1和T_2，这里γ是0的p阶邻近的函数，即当ε趋于零时，γ和它的前p阶所有偏微商也都趋于零，T_2是$G=0$和(τ)所包围的部分，而T_1是在T内除掉T_2遗留下来的部分。

1. 定义

定理 在体积分

$$I_1=\iint_{T_1}\cdots\int\frac{A}{G^{p+\frac{1}{2}}}dx_1dx_2\cdots dx_m$$

内减去适当的

$$\frac{B(\varepsilon)}{\varepsilon^{p-\frac{1}{2}}} \qquad (6)$$

后，当ε趋于零时有定限，此处B是可以展开为ε的至少p项台劳展开的函数。

此时，为了(6)内的p有实际意义，应取γ使
$\left(\frac{\partial\gamma}{\partial\varepsilon}\right)_{\varepsilon=0}\neq 0.$

要证明

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\left[I_1-\frac{B(\varepsilon)}{\varepsilon^{p-\frac{1}{2}}}\right]$$

存在，我们需对A加较强的条件。但显然还不够，因为几何情形远较一维复杂，需要对G和与$G=0$相邻的T的边界S''加以更强的条件，所有这些条件，将随着推理的需要，逐步引进。

证：不失普遍性，我们可以假定：在$G=0$上任意点$\frac{\partial G}{\partial x_m}$恒不为零。这样$G\equiv(x_m-\bar{x}_m)G_1$，$G_1$恒不为零，而$(\tau)$可改写为

$$x_m=\gamma_1(x_1,x_2,\cdots,x_{m-1},\varepsilon)+\bar{x}_m(x_1,x_2,\cdots,x_{m-1}),\quad(\tau_1)$$

此处γ_1与γ有相同的性质，即当ε趋于零时，γ_1和它对x_1，$x_2,\cdots,x_{m-1}$的前p阶所有偏微商也趋于零，而γ_1本身仍与ε为同阶无穷小。

不失普遍性，可设平行于x_m轴的直线和T_1的高界只交于一点$\bar{x}_m+\chi_m(x_1,x_2,\cdots,x_{m-1})$。$T_1$在$x_1,x_2,\cdots,x_{m-1}$面上的垂直投影是$\bar{x}_m$，$\gamma_1$和$\chi_m$的定义域，命为$G_2(\varepsilon)$，$G_2(\varepsilon)$的边界是

$$\chi_m(x_1,x_2,\cdots,x_{m-1})=\gamma_1(x_1,x_2,\cdots,x_{m-1},\varepsilon).$$

T_1+T_2在x_1，x_2，$\cdots$，x_{m-1}平面上的垂直投影G_2的边界则将是$\chi_m(x_1,x_2,\cdots,x_{m-1})=0$.

则有

$$I_1=\int\cdots\int_{G_2(\varepsilon)}dx_1dx_2\cdots dx_{m-1}\int_{\bar{x}_m+\gamma_1}^{\bar{x}_m+\chi_m}\frac{A\,dx_m}{G^{p+\frac{1}{2}}}=$$

$$=\int\cdots\int_{G_2(\varepsilon)} dx_1 dx_2\cdots dx_{m-1}\int_{\bar{x}_m+\gamma_1}^{\bar{x}_m+\chi_m}\frac{A dx_m}{[(x_m-\bar{x}_m)G_1]^{p+\frac{1}{2}}}.$$

假定 A, G 对 $x_1, x_2, \cdots, x_m$ 都是 p 阶连续可微的，则有

$$I_1=\sum_{i=0}^{p-1}\frac{1}{\left(p-i-\frac{1}{2}\right)i!}\int\cdots\int_{G_2(\varepsilon)}$$

$$\left[\frac{\partial^i}{\partial x_m^i}\left(\frac{A}{G_1^{\,p-\frac{1}{2}}}\right)\right]_{x_m=\bar{x}_m}\frac{dx_1dx_2\cdots dx_{m-1}}{\chi_m^{\,p-i-\frac{1}{2}}}-$$

$$-\sum_{i=0}^{p-1}\frac{1}{\left(p-i-\frac{1}{2}\right)i!}\int\cdots\int_{G_2(\varepsilon)}$$

$$\left[\frac{\partial^i}{\partial x_m^i}\left(\frac{A}{G_1^{\,p+\frac{1}{2}}}\right)\right]_{x_m=\bar{x}_m}\frac{dx_1dx_2\cdots dx_m}{\gamma_1^{\,p-i-\frac{1}{2}}}+$$

$$+\int\cdots\int_{G_2(\varepsilon)} dx_1dx_2\cdots dx_{m-1}\int_{\bar{x}_m+\gamma_1}^{\bar{x}_m+\chi_m}\frac{A_1dx_m}{(x_m-\bar{x}_m)^{p+\frac{1}{2}}},\quad(7)$$

其中

$$A_1=\frac{A}{G_1^{\,p+\frac{1}{2}}}-\left\{\left(\frac{A}{G_1^{\,p+\frac{1}{2}}}\right)_{x_m=\bar{x}_m}+\right.$$

$$+\left[\frac{\partial}{\partial x_m}\left(\frac{A}{G_1^{\,p+\frac{1}{2}}}\right)\right]_{x_m=\bar{x}_m}(x_m-\bar{x}_m)+\cdots+$$

$$\left.+\left[\frac{\partial^{p-1}}{\partial x_m^{p-1}}\left(\frac{A}{G_1^{\,p+\frac{1}{2}}}\right)\right]_{x_m=\bar{x}_m}\frac{(x_m-\bar{x}_m)^{p-1}}{(p-1)!}\right\}.$$

(7)右端的m重积分，当 $\varepsilon\to 0$ 时显然有意义，因为被积

函数内 $x_m-\bar{x}_m$ 的指数只是 $-\frac{1}{2}$，并且这个瑕积分的值与 γ_1 的取法无关。

由于 γ_1 是 $x_1,x_2,\cdots,x_{m-1}$ 的正规函数，并且是 ε 的同阶无穷小，所以(7)右端第二个 $m-1$ 重积分显然可以写为 (6) 的形式。

余下来的第一个 $m-1$ 重积分可以写为

$$I_2=-\int_{G_2(\varepsilon)}\cdots\int\frac{A_2}{\chi_m^{p-\frac{1}{2}}}dx_1dx_2\cdots dx_{m-1},$$

由于 $G_2(\varepsilon)$ 整个边界刚巧是 $\chi_m=\gamma_1$，所以这个积分和 I_1 完全一样，只是维数少 1。因此只须假定可找到 $B_1(\varepsilon)$ 使

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\left[I_2-\frac{B_1(\varepsilon)}{\varepsilon^{p-3/2}}\right]$$

存在，则定理就得证。

因之若假定我们要证明的性质在 $m-1$ 维空间存在，并且所得的极限又与 γ_1 的取法无关，则此性质在 m 维空间亦必存在，并且所得的极限与 γ_1 的取法无关。

总之，若

1) A 对 $x_1,x_2,\cdots,x_m$ 是 p 阶连续可微的；

2) G 对 $x_1,x_2,\cdots,x_m$ 也是 p 阶连续可微；

3) 在 $G=0$ 上任一点 G 的一阶偏微商不同时为零；

4) 与 $G=0$ 邻接的边界的方程式的左端满足 2),3)；

5) 这些邻接于 $G=0$ 的边界无一处和 $G=0$ 相切（否则 I_2 的奇性将增高）。

则必能求得 $B(\varepsilon)$ 使

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\left[I_1-\frac{B(\varepsilon)}{\varepsilon^{p-\frac{1}{2}}}\right]$$

存在，并且这个极限与γ的取法无关。

定义 这个极限称为(5)的有限部分，用符号

$$\mathrm{Pf}\iint_T\cdots\int\frac{A(x_1,x_2,\cdots,x_m)dx_1dx_2\cdots dx_m}{G^{p+\frac{1}{2}}}$$

来表示。

2. 主要性质

由(7)有

$$I_1-\sum_{i=0}^{p-1}\frac{1}{\left(p-i-\frac{1}{2}\right)i!}\int\cdots\int_{G_2(\varepsilon)}$$

$$\left[\frac{\partial^i}{\partial x_m^i}\left(\frac{A}{G_1^{p+\frac{1}{2}}}\right)\right]_{x_m=\bar{x}_m}\frac{dx_1dx_2\cdots dx_m}{\gamma_1^{p-i+\frac{1}{2}}}-\frac{B_1}{\varepsilon^{p-\frac{1}{2}}}+$$

$$+\int\cdots\int_{G_2(\varepsilon)}dx_1dx_2\cdots dx_{m-1}\int_{\bar{x}_m+\chi_m}^{\bar{x}_m+\gamma_1}\frac{A_1dx_m}{(x_m-\bar{x}_m)^{p+\frac{1}{2}}}=$$

$$=\int\cdots\int_{G_2(\varepsilon)}dx_1\,dx_2\cdots dx_{m-1}\cdot$$

$$\cdot\left\{\mathrm{Pf}\int_{\bar{x}_m}^{\bar{x}_m+\chi_m}\frac{Adx_m}{G^{p+\frac{1}{2}}}-\frac{B_1}{\varepsilon^{p-\frac{1}{2}}}\right\},$$

命$\varepsilon\to0$，则有

性质 1

$$\mathrm{Pf}\iint_T\cdots\int\frac{A}{G^{p+\frac{1}{2}}}dx_1dx_2\cdots dx_m=$$

$$= \mathrm{Pf}\int_{G_2}\cdots\int dx_1 dx_2\cdots dx_{m-1}\,\mathrm{Pf}\int_{\bar{x}_m}^{\bar{x}_m+\chi_m}\frac{A\,dx_m}{G^{p+\frac{1}{2}}}. \quad (8)$$

若与 $G=0$ 邻接的边界是平行于 x_m 轴的直线的轨迹，则 $G_2(\varepsilon)\equiv G_2$，且 $\chi_m>c>0$（c：常数），则有

$$\mathrm{Pf}\iint_T\cdots\int\frac{A}{G^{p+\frac{1}{2}}}dx_1 dx_2\cdots dx_m=$$

$$=\int_{G_2}\cdots\int dx_1 dx_2\cdots dx_{m-1}\,\mathrm{Pf}\int_{\bar{x}_m}^{\bar{x}_m+\chi_m}\frac{A\,dx_m}{G^{p+\frac{1}{2}}}. \quad (9)$$

有了公式(8)和(9)，就可把求重积分的有限部分具体计算问题变为求单积分的有限部分的具体计算问题。

性质 2 设 $x_i=f_i(y_1,\cdots,y_m)$，$1\leqslant i\leqslant m$，区域T经变换 $x_i=f_i$ 变为 T'，且

$$D(y_1,y_2,\cdots,y_m)=\frac{\partial(x_1,x_2,\cdots,x_m)}{\partial(y_1,y_2,\cdots,y_m)}\neq 0,$$

则

$$\mathrm{Pf}\iint_T\cdots\int\frac{A(x_1,x_2,\cdots,x_m)}{G^{p+\frac{1}{2}}(x_1,\cdots,x_m)}dx_1 dx_2\cdots dx_m=$$

$$=\mathrm{Pf}\iint_{T'}\cdots\int\frac{A(f_1,f_2,\cdots,f_m)}{G^{p+\frac{1}{2}}(f_1,\cdots,f_m)}|D(y_1,\cdots,y_m)|\,dy_1\cdots dy_m$$

即变量替换公式成立。

证：设 $T_1\xrightarrow{x_i=f_i}T_1'$，由于 $D(y_1,\cdots,y_m)\neq 0$，故当 $\varepsilon\to 0$ 时，$T_1\to T$，$T_1'\to T'$，于是

$$\iint_{T_1}\cdots\int\frac{A(x_1,\cdots,x_m)}{G^{p+\frac{1}{2}}(x_1,\cdots,x_m)}dx_1dx_2\cdots dx_m=$$

$$=\iint_{T_1'}\cdots\int\frac{A(f_1,\cdots,f_m)}{G^{p+\frac{1}{2}}(f_1,\cdots,f_m)}|D(y_1,\cdots,y_m)|dy_1\cdots dy_m,$$

则有

$$\mathrm{Pf}\iint_{T}\cdots\int\frac{A(x_1,\cdots,x_m)}{G^{p+\frac{1}{2}}(x_1,\cdots,x_m)}dx_1dx_2\cdots dx_m=$$

$$=\lim_{\varepsilon\to 0}\left[\iint_{T_1}\cdots\int\frac{A(x_1\cdots,x_m)}{G^{p+\frac{1}{2}}(x_1,\cdots,x_m)}dx_1dx_2\cdots dx_m-\frac{B(\varepsilon)}{\varepsilon^{p-\frac{1}{2}}}\right]=$$

$$=\lim_{\varepsilon\to 0}\left[\iint_{T_1'}\cdots\int\frac{A(f_1,\cdots,f_m)}{G^{p+\frac{1}{2}}(f_1,\cdots,f_m)}|D(y_1,\cdots,y_m)|\cdot\right.$$

$$\left.\cdot dy_1\cdots dy_m-\frac{B(\varepsilon)}{\varepsilon^{p-\frac{1}{2}}}\right]=$$

$$=\mathrm{Pf}\iint_{T'}\cdots\int\frac{A(f_1,\cdots,f_m)}{G^{p+\frac{1}{2}}(f_1,\cdots,f_m)}|D(y_1,\cdots,y_m)|\cdot$$

$$\cdot dy_1\cdots,dy_m,$$

若$G=0$有一奇线，即T的奇边界由两相交正规面$G_1=0$，$G_2=0$ 形成，也就是$G=G_1G_2$，我们也可以定义重积分的有限部分。此时，我们需要作点变换：

$$\chi_1=G_1(x_1,\cdots,x_m),\quad \chi_2=G_2,\cdots,\chi_m=G_m,$$

这里只需取 $G_i(i=3,\cdots,m)$使

$$\frac{D(G_1,G_2,\cdots,G_m)}{D(x_1,x_2,\cdots,x_m)}$$

恒不为零，而问题就变为要定义

$$\mathrm{Pf}\iint_{T}\cdots\int\frac{A(x_1,x_2,\cdots,x_m)}{(x_1x_2)^{p+\frac{1}{2}}}dx_1dx_2\cdots dx_m,$$

其中T的一部分边界刚巧就是$x_1=0$，$x_2=0$. T内的点为$x_1>0, x_2>0$.

性质 3 设在基本公式

$$\iint_T\cdots\int\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial P_i}{\partial x_i}dx_1\cdots dx_m=-\int_S\cdots\int\sum_{i=1}^{m}P_i\pi_i dS$$

左端被积函数呈$\dfrac{A}{G^{p+\frac{1}{2}}}$形，而右端的$P_i$呈$\dfrac{B_i}{G^{p-\frac{1}{2}}}$形，这里$A, B_i$仍是$x$的正规函数，若积分域$T$的边界整个由$G=0$形成，则

$$\mathrm{Pf}\iint_T\cdots\int=0.$$

证：首先我们取

$$G=\gamma(x_1,x_2,\cdots,x_m,\varepsilon) \tag{τ}$$

把T分为T_1和T_2，而在T_1上将有

$$\iint_{T_1}\cdots\int=-\int_\tau\cdots\int,$$

此式右端显然可以写为$\dfrac{B(\varepsilon)}{\varepsilon^{p-\frac{1}{2}}}$，故

$$\iint_{T_1}\cdots\int-\frac{B(\varepsilon)}{\varepsilon^{p-\frac{1}{2}}}=0,$$

因之

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\left[\iint_{T_1}\cdots\int-\frac{B(\varepsilon)}{\varepsilon^{p-\frac{1}{2}}}\right]=\mathrm{Pf}\iint_T\cdots\int=0.$$

若$G=0$仅是T的边界的一部分，余下的部分为S''，则当我们用(τ)把T分为两部分T_1和T_2时，应有

$$\iint\limits_{T_1}\cdots\int = -\int\limits_{\tau}\cdots\int - \int\limits_{S''_1}\cdots\int,$$

其中 S''_1 是 S'' 同时又是 T_1 的边界的部分。此时右端第一项显然仍可写为$\dfrac{B(s)}{s^{p-\frac{1}{2}}}$. 所以

$$\iint\limits_{T_1}\cdots\int - \frac{B(s)}{s^{p-\frac{1}{2}}} = -\int\limits_{S_1''}\cdots\int$$

因之就有

$$\mathrm{Pf}\iint\limits_{T}\cdots\int = -\mathrm{Pf}\int\limits_{S''}\cdots\int.$$

重积分的有限部分还有其它性质，它与单积分的有限部分具有的性质相同。

这里还要指出：若T的奇边界$G=0$含有参数，则有限部分对参变数的微分运算，可以直接搬到积分符号下面去。

对重积分的有限部分进行估计，仍应从(8)式出发，将重积分的有限部分化为单积分的有限部分，由单积分的有限部分的估计立刻可以得到重积分的有限部分的估计。因此，欲得到这种估计，我们只须知道被积函数及其前p阶微商的上界和积分路线的长度的上界和下界。

§4 呈整数阶无穷的重瑕积分

1. 定义

定理 设A，G对$x_1, x_2, \cdots, x_m$是p阶连续可微函数，在$G=0$上任一点G的一阶偏微商不同时为零，则在体积分

$$I_1=\iint\limits_{T_1}\cdots\int \frac{A}{G^p}dx_1dx_2\cdots dx_m,\ p\geqslant 1$$

内减去适当的

$$\frac{B(\varepsilon)}{\varepsilon^{p-1}}+\bar{B}(\varepsilon)\log\varepsilon$$

之后，当 ε 趋于零时极限存在。

定理中的 T_1 与上节含义相同。

证：不失普遍性，假定在 $G=0$ 上任一点 $\frac{\partial G}{\partial x_m}\neq 0$，于是

$$G=(x_m-\bar{x}_m)G_1,$$

而 G_1 恒不为零。这时，划分 T 的曲面

$$G=\gamma(x_1,x_2,\cdots,x_m,\varepsilon)$$

可写成

$$x_m=\bar{x}_m(x_1,x_2,\cdots,x_{m-1})+\gamma_1(x_1,x_2,\cdots,x_{m-1},\varepsilon).$$

不失普遍性，设平行于 x_m 轴的直线和 T_1 的高界只交于一点 $\bar{x}_m+\chi_m(x_1,x_2,\cdots,x_{m-1})$，$T_1$ 在 $x_1,x_2,\cdots,x_{m-1}$ 面上的直交投影，将就是 $\bar{x}_m$，γ_1 和 χ_m 的定义域，命为 $G_2(\varepsilon)$，$G_2(\varepsilon)$ 的边界则将是

$$\chi_m=\gamma_1(x_1,x_2,\cdots,x_{m-1},\varepsilon),$$

T_1+T_2 在 $x_1,x_2,\cdots$，x_{m-1} 平面上的直交投影则将是 $\chi_m(x_1,x_2,\cdots,x_{m-1})=0$。于是

$$I_1=\int\limits_{G_2(\varepsilon)}\cdots\int dx_1dx_2\cdots dx_{m-1}\int_{\bar{x}_m+\gamma_1}^{\bar{x}_m+\chi_m}\frac{A}{G^p}dx_m=$$

$$= \int\cdots\int_{G_2(\varepsilon)} dx_1 dx_2 \cdots dx_{m-1} \int_{\bar{x}_m+\gamma_1}^{\bar{x}_m+\chi_m} \frac{A/G_1^p}{(x_m-\bar{x}_m)^p} dx_m.$$

既假定 A，G 为 $x_1, x_2, \cdots, x_m$ 的 p 阶连续可微函数，则有

$$I_1 = -\sum_{i=0}^{p-2} \frac{1}{(p-i-1)i!} \cdot$$

$$\cdot \int\cdots\int_{G_2(\varepsilon)} \left[\frac{\partial^i}{\partial x_m^i}\left(\frac{A}{G_1^p}\right)\right]_{x_m=\bar{x}_m} \frac{dx_1 dx_2 \cdots dx_{m-1}}{\chi_m^{p-i-1}} +$$

$$+ \sum_{i=0}^{p-2} \frac{1}{(p-i-1)i!} \cdot$$

$$\cdot \int\cdots\int_{G_2(\varepsilon)} \left[\frac{\partial^i}{\partial x_m^i}\left(\frac{A}{G_1^p}\right)\right]_{x_m=\bar{x}_m} \frac{dx_1 dx_2 \cdots dx_{m-1}}{\gamma_1^{p-i-1}} +$$

$$+ \int\cdots\int_{G_2(\varepsilon)} \frac{1}{(p-1)!}\left[\frac{\partial^{p-1}}{\partial x_m^{p-1}}\left(\frac{A}{G_1^p}\right)\right]_{x_m=\bar{x}_m} \cdot$$

$$\cdot \log \chi_m dx_1 dx_2 \cdots dx_{m-1} -$$

$$- \int\cdots\int_{G_2(\varepsilon)} \frac{1}{(p-1)!}\left[\frac{\partial^{p-1}}{\partial x_m^{p-1}}\left(\frac{A}{G_1^p}\right)\right]_{x_m=\bar{x}_m} \cdot$$

$$\cdot \log \gamma_1 dx_1 dx_2 \cdots dx_{m-1} +$$

$$+ \int\cdots\int_{G_2(\varepsilon)} dx_1 dx_2 \cdots dx_{m-1} \int_{\bar{x}_m+\gamma_1}^{\bar{x}_m+\chi_m} \frac{A_1}{(x_m-\bar{x}_m)^p} dx_m, \quad (10)$$

其中

$$A_1 = \frac{A}{G_1^p} - \sum_{i=0}^{p-1}\left[\frac{\partial^i}{\partial x_m^i}\left(\frac{A}{G_1^p}\right)\right]_{x_m=\bar{x}_m} (x_m-\bar{x}_m)^i / i! =$$

$$=\frac{1}{p!}\left[\frac{\partial^p}{\partial x^p}\left(\frac{A}{G_1^p}\right)\right]_\theta (x_m-\bar{x}_m)^p,\quad \bar{x}_m<\theta<x_m$$

(10)式第二项可以写成$\frac{B_1(\varepsilon)}{\varepsilon^{p-1}}$的形式，第四项可以写成$\bar{B}_1(\varepsilon)\log\varepsilon$的形式，由于$G_2(\varepsilon)$的边界为$\chi_m=\gamma_1$，所以第一项与$I_1$形式相同，只是空间维数少1，而

$$\int\limits_{G_2(\varepsilon)}\cdots\int\left[\frac{\partial^{p-1}}{\partial x_m^{p-1}}\left(\frac{A}{G_1^p}\right)\right]_{x_m=\bar{x}_m}\log\chi_m dx_1dx_2\cdots dx_{m-1}$$

当ε趋于零时是收敛的，故定理成立.

定义 极限

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\left[\iint\limits_{T_1}\cdots\int\frac{A}{G^p}dx_1dx_2\cdots dx_m-\frac{\bar{B}(\varepsilon)}{\varepsilon^{p-1}}-B(\varepsilon)\log\varepsilon\right]$$

称为瑕积分$\iint\limits_{T}\cdots\int\frac{A}{G^p}dx_1dx_2\cdots dx_m$的有限部分，记为

$$\mathrm{Pf}\iint\limits_{T}\cdots\int\frac{A}{G^p}dx_1dx_2\cdots dx_m.$$

2. 主要性质

性质1 设A有p阶连续微商，则有

$$\mathrm{Pf}\iint\limits_{T}\cdots\int\frac{A}{G^p}dx_1dx_2\cdots dx_m=$$

$$=\mathrm{Pf}\int\limits_{G_2}\cdots\int dx_1dx_2\cdots dx_{m-1}\,\mathrm{Pf}\int_{\bar{x}_m}^{\bar{x}_m+\chi_m}\frac{A}{G^p}dx_m.$$

证：因为

$$I_1-\frac{B(\varepsilon)}{\varepsilon^{p-1}}-\bar{B}(\varepsilon)\log\varepsilon=$$

$$=-\sum_{i=0}^{p-2}\int\limits_{G_2(\varepsilon)}\cdots\int\left[\frac{\partial^i}{\partial x_m^i}\left(\frac{A}{G_1^p}\right)\right]_{x_m=\bar{x}_m}\frac{dx_1dx_2\cdots dx_{m-1}}{i!(p-i-1)\chi_m^{p-i-1}}+$$

$$+\frac{1}{(p-1)!}\int\limits_{G_2(\varepsilon)}\cdots\int\left[\frac{\partial^{p-1}}{\partial x_m^{p-1}}\left(\frac{A}{G_1^p}\right)\right]_{x_m=\bar{x}_m}\cdot$$

$$\cdot\log\chi_m dx_1dx_2\cdots dx_{m-1}+$$

$$+\int\limits_{G_2(\varepsilon)}\cdots\int dx_1dx_2\cdots dx_{m-1}\int_{\bar{x}_m+\gamma_1}^{\bar{x}_m+\chi_m}\frac{A_1}{(x_m-\bar{x}_m)^p}dx_m-$$

$$-\frac{B(\varepsilon)-B_1(\varepsilon)}{\varepsilon^{p-2}}-[\bar{B}(\varepsilon)-\bar{B}_1(\varepsilon)]\log\varepsilon=$$

$$=\int\limits_{G_2}\cdots\int\left[\mathrm{Pf}\int_{\bar{x}_m}^{\bar{x}_m+\chi_m}\frac{A}{G^p}dx_m\right]dx_1dx_2\cdots dx_{m-1}+$$

$$+\int\limits_{G_2(\varepsilon)}\cdots\int\left[\int_{\bar{x}_m+\gamma_1}^{\bar{x}_m}\frac{A_1}{(x_m-\bar{x}_m)^p}dx_m\right]dx_1dx_2\cdots dx_{m-1}-$$

$$-\frac{B(\varepsilon)-B_1(\varepsilon)}{\varepsilon^{p-2}}-[\bar{B}(\varepsilon)-\bar{B}_1(\varepsilon)]\log\varepsilon,$$

当 ε 趋于零时，最后得

$$\mathrm{Pf}\iint\limits_{T}\cdots\int\frac{A}{G^p}dx_1dx_2\cdots dx_m=$$

$$=\mathrm{Pf}\int\limits_{G_2}\cdots\int dx_1dx_2\cdots dx_{m-1}\,\mathrm{Pf}\int_{\bar{x}_m}^{\bar{x}_m+\chi_m}\frac{A}{G^p}dx_m.$$

性质 2　设 $x_i=f_i(y_1,\cdots,y_m)$，$1\leqslant i\leqslant m$，在此变换下，

T变为T'，且

$$D(y_1,\cdots,y_m)=\frac{\partial(x_1,x_2,\cdots,x_m)}{\partial(y_1,y_2,\cdots,y_m)}\neq 0,$$

则

$$\mathrm{Pf}\iint\limits_{T}\cdots\int\frac{A}{G^p}dx_1dx_2\cdots dx_m=$$

$$=\mathrm{Pf}\iint\limits_{T'}\cdots\int\frac{A(f_1,\cdots,f_m)}{G^p(f_1,f_2,\cdots,f_m)}\cdot$$

$$\cdot|D(y_1,y_2,\cdots,y_m)|dy_1dy_2\cdots dy, \qquad (11)$$

即变量替换公式成立。

证 设 $T_1\xrightarrow{x_i=f_i}T_1'$，由于 $D(y_1,y_2,\cdots,y_m)\neq 0$，故当 ε 趋于零时，$T_1\longrightarrow T$，$T_1'\longrightarrow T'$，由

$$\iint\limits_{T_1}\cdots\int\frac{A}{G^p}dx_1dx_2\cdots dx_m=$$

$$=\iint\limits_{T_1'}\cdots\int\frac{A(f_1,f_2,\cdots,f_m)}{G^p(f_1,f_2,\cdots f_m)}\cdot$$

$$\cdot|D(y_1,y_2,\cdots,y_m)|dy_1dy_2\cdots dy_m$$

得

$$\mathrm{Pf}\iint\limits_{T}\cdots\int\frac{A}{G^p}dx_1dx_2\cdots dx_m=$$

$$=\lim_{\varepsilon\to 0}\left[\iint\limits_{T_1}\cdots\int\frac{A}{G^p}dx_1dx_2\cdots dx_m-\frac{B(\varepsilon)}{\varepsilon^{p-1}}-\bar{B}(\varepsilon)\log\varepsilon\right]=$$

$$=\lim_{\varepsilon\to 0}\left[\iint\limits_{T_1'}\cdots\int\frac{A(f_1,f_2,\cdots,f_m)}{G^p(f_1,f_2,\cdots,f_m)}|D(y_1,y_2,\cdots,y_m)|\cdot\right.$$

$$\left.\cdot dy_1dy_2\cdots dy_m-\frac{B(\varepsilon)}{\varepsilon^{p-1}}-\bar{B}(\varepsilon)\log\varepsilon\right]=$$

$$= \mathrm{Pf}\iint\limits_{T'}\cdots\int \frac{A(f_1,f_2,\cdots,f_m)}{G^p(f_1,f_2,\cdots,f_m)}|D(y_1,y_2,\cdots,y_m)|\cdot$$

$$\cdot\, dy_1 dy_2\cdots dy_m.$$

这种呈整数阶无穷瑕积分的其它性质，如线性性质，对区域的可加性质，以及对参数的可微性等，不再一一证明。对这类重积分有限部分进行估计，与呈分数阶无穷的情形，也没有实质差异。

无论单积分有限部分或重积分有限部分，引进有限部分这新概念是为了给瑕积分一个意义。给予这概念以意义的技巧在于未取极限时，从瑕积分里减去一个函数，这个函数在取极限时，以分数阶(或整数阶)趋于无穷，然后再取极限。因此在具体运算中，某些已知是将分数阶地或整数阶地趋于无穷的函数，就可以舍弃不计。

第二章　超双曲型方程的解的中量定理

§1　中量定理

1. 基本解

考虑超双曲型方程

$$F(u)\equiv\sum_{i=1}^{m}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial y_i^2}\right)=0,\quad (m\geqslant 2) \tag{1}$$

这方程的特征二次式是

$$\mathscr{A}=\sum_{i=1}^{m}\pi_i^2-\sum_{j=1}^{m}\sigma_j^2\quad,$$

次特征线的方程是

$$\frac{dx_i}{\pi_i}=\frac{dy_i}{-\sigma_j}=\frac{-d\pi_i}{0}=-\frac{d\sigma_j}{0}=ds,$$

所以

$$\begin{cases} x_i=x_i^0+\pi_{0i}s, \\ y_j=y_j^0-\sigma_{0j}s, \\ \pi_i=\pi_{0i}, \\ \sigma_j=\sigma_{0j}. \end{cases}$$

故方程(1)的特征角面函数为

$$\Gamma=\sum_{i=1}^{m}(x_i-x_i^0)^2-\sum_{j=1}^{m}(y_j-y_j^0)^2,$$

函数Γ是动定两点测地距离的平方。

由阿达玛关于基本解的求法，方程(1)的基本解是 Γ^{1-m}.

2. 基本公式

(1) 的伴随方程是

$$G(v)\equiv\sum_{i=1}^{m}\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x_i^2}-\frac{\partial^2 v}{\partial y_i^2}\right)=0,$$

显然有

$$vF(u)-uG(v)=$$

$$=\sum_{i=1}^{m}\left[\frac{\partial}{\partial x_i}\left(v\frac{\partial u}{\partial x_i}-u\frac{\partial v}{\partial x_i}\right)-\frac{\partial}{\partial y_i}\left(v\frac{\partial u}{\partial y_i}-u\frac{\partial v}{\partial y_i}\right)\right].$$

设在 $2m$ 维空间有一体积 V 为该空间内一闭曲面 S 所范围，在 V 上求上式两端的积分，则得

$$\iint_V\cdots\int\left[vF(u)-uG(v)\right]dT=$$

$$=-\int_S\cdots\int\left[\sum_{i=1}^{m}\left(v\frac{\partial u}{\partial x_i}-u\frac{\partial v}{\partial x_i}\right)\pi_i-\right.$$

$$\left.-\sum_{i=1}^{m}\left(v\frac{\partial u}{\partial y_i}-u\frac{\partial v}{\partial y_i}\right)\rho_i\right]dS, \quad (2)$$

其中 dT 是体积元素，dS 是面积元素， $\pi_1,\pi_2,\cdots,\pi_m$, ρ_1, $\rho_2,\cdots,\rho_m$ 是 S 上各点的内法线的方向余弦。

若在(2)中取 u 为超双曲型方程的解，而 v 取为基本解 Γ^{1-m}，适当选择 V，则积分成为呈整数阶无穷的瑕积分，公式(2)便可写成含有限部分的形式

$$\mathrm{Pf}\iint_V\cdots\int\left[vF(u)-uG(v)\right]dV=$$

$$=-\mathrm{Pf}\int_S\cdots\int\left[\sum_{i=1}^{m}\left(v\frac{\partial u}{\partial x_i}-u\frac{\partial v}{\partial x_i}\right)\pi_i-\right.$$

$$-\sum_{i=1}^{m}\left(v\frac{\partial u}{\partial y_i}-u\frac{\partial v}{\partial y_i}\right)\rho_i\Big]dS. \qquad (3)$$

现在取V是 $2m$ 维空间内两个柱面

$$\sum_{i=1}^{m}(x_i-x_i^0)^2=r^2$$

和

$$\sum_{i=1}^{m}(y_i-y_i^0)^2=s^2$$

所范围的体积，其中 $x_1^0,x_2^0,\cdots,x_m^0,y_1^0,y_2^0,\cdots,y_m^0$ 是任意固定的实常数。因此，V上的点就是适合下列二不等式

$$\sum_{i=1}^{m}(x_i-x_i^0)^2\leqslant r^2,$$

$$\sum_{i=1}^{m}(y_i-y_i^0)^2\leqslant s^2$$

的$(x_1,x_2,\cdots,x_m,y_1,y_2,\cdots,y_m)$或简写为$(x_i,y_i)$所代表的点，而$V$就是这些点的集合。$V$的边界可以分为两部分：

$$S_1:\begin{cases}\sum_{i=1}^{m}(x_i-x_i^0)^2=r^2\\ \sum_{i=1}^{m}(y_i-y_i^0)^2\leqslant s^2\end{cases}$$

和

$$S_2:\begin{cases}\sum_{i=1}^{m}(y_i-y_i^0)^2=s^2,\\ \sum_{i=1}^{m}(x_i-x_i^0)^2<r^2.\end{cases}$$

凡适合 S_1 或 S_2 的点所成的集就是 S，它是一个闭曲面，这样取定V及其边界后，由于S_1 是柱面 $\sum_{i=1}^{m}(x_i-x_i^0)^2=r^2$上的一部分，所以$\pi_i=\frac{x_i-x_i^0}{r}$，$\rho_i=0,i=1,2,\cdots,m$； 而 S_2 是柱

面$\sum_{i=1}^{m}(y_i-y_i^0)^2=s^2$上的一部分， 所以 $\rho_i=\frac{y-y_i^0}{s}, \pi_i=0$，$i=1,2,\cdots,m$. 故公式(3)可改写为

$$\mathrm{Pf}\int\int_V\cdots\int\left[vF(u)-uG(v)\right]dV=$$

$$=-\mathrm{Pf}\int_S\cdots\int\left(v\frac{du}{dn}-u\frac{dv}{dn}\right)dS. \tag{4}$$

当被积函数无奇性，则基本公式取(2)，当具整数阶或分数阶无穷时，取(3)的形式，特别取形式(4)。

以下我们从基本解、基本公式出发来讨论超双曲型方程的解的中量定理。

3. 超双曲型方程的解的中量

由于u是(1)在V上的正规解，而v取为基本解Γ^{1-m}，则公式(4)就变为

$$\mathrm{Pf}\int_{S_1}\cdots\int\left(v\frac{du}{dn}-u\frac{dv}{dn}\right)dS=\mathrm{Pf}\int_{S_2}\cdots\int\left(v\frac{du}{dn}-u\frac{dv}{dn}\right)dS.$$

注意到在S_1上

$$v\frac{du}{dn}-u\frac{dv}{dn}=\frac{d(uv)}{dn}-2u\frac{dv}{dn}$$

$$=-\frac{\partial(uv)}{\partial r}+2u\frac{\partial v}{\partial r}$$

$$=-\frac{\partial(uv)}{\partial r}+\frac{4(1-m)r}{\Gamma}uv,$$

于是我们有

$$\mathrm{Pf}\int_{S_1}\cdots\int\left(v\frac{du}{dn}-u\frac{dv}{dn}\right)dS=$$

$$= \mathrm{Pf}\iint_{V_{11}}\cdots\int\int_{S_{11}}\cdots\int\left[-\frac{\partial(uv)}{\partial r}+\frac{4(1-m)r}{\Gamma}uv\right]dS_{11},$$

其中 S_{11} 是适合$\sum_{i=1}^{m}(x_i-x_i^0)^2=r^2$, y_i 任意（满足$\sum_{i=1}^{m}(y_i-y_i^0)^2\leqslant s^2$）的点所成的集。$V_{11}$ 是适合$\sum_{i=1}^{m}(y_i-y_i^0)^2\leqslant s^2$的点$y_i$所构成的集合。

在上式右端中，命 $x_i-x_i^0=r\alpha_i$，则沿 S_{11} 的积分可以化单位超球面

$$\Omega_\alpha:\quad \sum_{i=1}^{m}\alpha_i^2=1$$

上的积分。而沿 V_{11} 的积分可先计算它沿超球面

$$\sum_{i=1}^{m}(y_i-y_i^0)^2=\sigma^2$$

上的面积分，然后就求得之值，再由 0 到 s 求单积分。再命 $y_i-y_i^0=\sigma\beta_i$，则沿

$$\sum_{i=1}^{m}(y_i-y_i^0)^2=\sigma^2$$

的积分，也可化为沿单位超球面

$$\Omega_\beta:\quad \sum_{i=1}^{m}\beta_i^2=1$$

上的积分。于是

$$\mathrm{Pf}\int_{S_1}\cdots\int\left(v\frac{du}{dn}-u\frac{dv}{dn}\right)dS=$$

$$=\mathrm{Pf}\int_0^s\sigma^{m-1}d\sigma\int_{\Omega_\beta}\cdots\int\Big\{r^{m-1}\int_{\Omega_\alpha}\cdots\int$$

$$\left[-\frac{\partial(uv)}{\partial r}+\frac{4(1-m)r}{r^2-\sigma^2}uv\right]d\Omega_\alpha\Big\}d\Omega_\beta=$$

$$= \mathrm{Pf}\left\{-r^{m-1}\int_0^s \frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{\sigma^{m-1}}{(r^2-\sigma^2)^{m-1}}M(r,\ \sigma)\right]d\sigma\right\}+$$

$$+4(1-m)\ \mathrm{Pf}\left\{r^m\int_0^s \frac{\sigma^{m-1}}{(r^2-\sigma^2)^m}M(r,\sigma)d\sigma\right\}$$

其中

$$M(r,s)=\int_{\Omega_\alpha}\cdots\int\int_{\Omega_\beta}\cdots\int u(x_i^0+\alpha_i r, y_i^0+\beta_i s)d\Omega_\alpha d\Omega_\beta$$

称为超双曲型方程的解 u 在$\sum_{i=1}^m(x_i-x_i^0)^2=r^2$，$\sum_{i=1}^m(y_i-y_i^0)^2=$
$=s^2$上的中量。

同样，可以得到

$$\mathrm{Pf}\int_{S_2}\cdots\int\left(v\frac{du}{dn}-u\frac{dv}{dn}\right)dS=$$

$$= \mathrm{Pf}\left\{-s^{m-1}\int_0^r \frac{\partial}{\partial s}\left[\frac{\rho^{m-1}}{(\rho^2-s^2)^{m-1}}M(\rho,s)\right]d\rho\right\}-$$

$$-4(1-m)\mathrm{Pf}\left\{s^m\int_0^r\frac{\rho^{m-1}}{(\rho^2-s^2)^m}M(\rho,\ s)d\rho\right\}.$$

因此得超双曲型方程的解的中量所适合的有限部分方程为

$$\mathrm{Pf}\left\{-r^{m-1}\int_0^s \frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{\sigma^{m-1}}{(r^2-\sigma^2)^{m-1}}M(r,\sigma)\right]d\sigma\right\}+$$

$$+4(1-m)\mathrm{Pf}\left\{r^m\int_0^s\frac{\sigma^{m-1}}{(r^2-\sigma^2)^m}M(r,\ \sigma)d\sigma\right\}=$$

$$= \mathrm{Pf}\left\{-s^{m-1}\int_0^r \frac{\partial}{\partial s}\left[\frac{\rho^{m-1}}{(\rho^2-s^2)^{m-1}}M(\rho,\ s)\right]d\rho\right\}-$$

$$-4(1-m)\mathrm{Pf}\left\{s^m\int_0^r\frac{\rho^{m-1}}{(\rho^2-s^2)^m}M(\rho,\ s)d\rho\right\}. \quad (5)$$

现在我们来简化关系式(5)。

情形 1　当 $r>s$ 时，(5)式左端为通常意义下的积分，(5)可写为

$$-r^{m-1}\int_0^s \frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{\sigma^{m-1}}{(r^2-\sigma^2)^{m-1}}M(r,\sigma)\right]d\sigma+$$

$$+4(1-m)r^m\int_0^s \frac{\sigma^{m-1}}{(r^2-\sigma^2)^m}M(r,\sigma)d\sigma=$$

$$=\mathrm{Pf}\left\{-s^m\int_0^r \frac{\partial}{\partial s}\left[\frac{\rho^{m-1}}{(\rho^2-s^2)^{m-1}}M(\rho,s)\right]d\rho\right\}-$$

$$-4(1-m)\mathrm{Pf}\left\{s^m\int_0^r \frac{\rho^{m-1}}{(\rho^2-s^2)^m}M(\rho,s)d\rho\right\}. \quad (6)$$

等式(6)右端的积分在 $\rho=s$ 发散，它的每一项可写成两部分：

$$\mathrm{Pf}\int_0^s\left[-s^{m-1}\frac{\partial}{\partial s}\frac{\rho^{m-1}}{(\rho^2-s^2)^{m-1}}M(\rho,s)\right]d\rho-$$

$$-\mathrm{Pf}\int_r^s\left[-s^{m-1}\frac{\partial}{\partial s}\frac{\rho^{m-1}}{(\rho^2-s^2)^{m-1}}M(\rho,s)\right]d\rho-$$

$$-4(1-m)\mathrm{Pf}\int_0^s s^m\frac{\rho^{m-1}}{(\rho^2-s^2)^m}M(\rho,s)d\rho+$$

$$+4(1-m)\mathrm{Pf}\int_r^s s^m\frac{\rho^{m-1}}{(\rho^2-s^2)^m}M(\rho,s)d\rho.$$

等式(6)两端对 s 求微商得

$$-r^{m-1}\frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{s^{m-1}}{(r^2-s^2)^{m-1}}M(r,s)\right]+$$

$$+4(1-m)r^m\frac{s^{m-1}}{(r^2-s^2)^m}M(r,\ s)=$$

$$=\frac{\partial}{\partial s}\,\mathrm{Pf}\int_0^s\left[-s^{m-1}\frac{\partial}{\partial s}\frac{\rho^{m-1}}{(\rho^2-s^2)^{m-1}}M(\rho,\ s)\right]d\rho-$$

$$-\frac{\partial}{\partial s}\,\mathrm{Pf}\int_r^s\left[-s^{m-1}\frac{\partial}{\partial s}\frac{\rho^{m-1}}{(\rho^2-s^2)^{m-1}}M(\rho,\ s)\right]d\rho-$$

$$-4(1-m)\frac{\partial}{\partial s}\,\mathrm{Pf}\int_0^s\left[\frac{s^m\rho^{m-1}}{(\rho^2-s^2)^m}M(\rho,\ s)\right]d\rho+$$

$$+4(1-m)\frac{\partial}{\partial s}\,\mathrm{Pf}\int_r^s\left[\frac{s^m\rho^{m-1}}{(\rho^2-s^2)^m}\,M(\rho,\ s)\right]d\rho,$$

再对r求微商，上式右端第一、三项为零，故

$$\frac{\partial}{\partial r}\left\{-r^{m-1}\frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{s^{m-1}}{(r^2-s^2)^{m-1}}M(r,\ s)\right]+\right.$$

$$\left.+4(1-m)\frac{r^m s^{m-1}}{(r^2-s^2)^m}M(r,\ s)\right\}=$$

$$=-\frac{\partial}{\partial s}\left\{\frac{\partial}{\partial r}\,\mathrm{Pf}\int_r^s\left[-s^{m-1}\frac{\partial}{\partial s}\ \frac{\rho^{m-1}}{(\rho^2-s^2)^{m-1}}M(\rho,\ s)\right]d\rho\right\}+$$

$$+4(1-m)\frac{\partial}{\partial s}\left\{\frac{\partial}{\partial r}\,\mathrm{Pf}\int_r^s\left[s^m\frac{\rho^{m-1}}{(\rho^2-s^2)^m}M(\rho,\ s)\right]d\rho\right\}.$$

由瑕积分有限部分的性质:

$$\frac{\partial}{\partial a}\,\mathrm{Pf}\int_a^b\frac{A(x,\ b)}{(b-x)^p}dx=-\frac{A(a,\ b)}{(b-a)^p},$$

则有

$$\frac{\partial}{\partial r}\left\{-r^{m-1}\frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{s^{m-1}}{(r^2-s^2)^{m-1}}M(r,\ s)\right]+\right.$$

$$\left.+4(1-m)\frac{r^m s^{m-1}}{(r^2-s^2)^m}M(r,\ s)\right\}=$$

$$=\frac{\partial}{\partial s}\left\{-s^{m-1}\frac{\partial}{\partial s}\left[\frac{r^{m-1}}{(r^2-s^2)^{m-1}}M(r,\ s)\right]-\right.$$

$$\left.-4(1-m)\frac{\partial}{\partial s}\left[\frac{s^m r^{m-1}}{(r^2-s^2)^m}M(r,\ s)\right]\right\}. \qquad (7)$$

把(7)简化并整理，得$M(r,\ s)$满足的方程

$$\frac{\partial^2 M}{\partial r^2}-\frac{\partial^2 M}{\partial s^2}+\frac{m-1}{r}\ \frac{\partial M}{\partial r}-\frac{m-1}{s}\ \frac{\partial M}{\partial s}=0. \qquad (8)$$

情形 II　当 $r<s$ 时，(5)式右端为通常意义下的积分，仿情形 I 的讨论，亦可以得到(8)。

所以，若 u 是方程(1)在 V 上的正规解，则它在

$$\Sigma(x_i-x_i^0)^2=r^2,\ \ \Sigma(y_i-y_i^0)^2=s^2$$

上的中量$M(r,\ s)$适合方程(8)。

因为M是 r 的偶函数也是 s 的偶函数，故这个中量还有下列性质：

$$\left[\frac{\partial}{\partial r}M\right]_{r=0}=\left[\frac{\partial}{\partial s}M\right]_{s=0}=0.$$

又由于M存在二阶偏微商，因此

$$\frac{\partial M}{\partial r}=O(r),\quad \frac{\partial M}{\partial s}=O(s).$$

知道了这些性质，就容易证明下述在超双曲型方程和其它许多问题里都很有用的中量定理（阿斯諾生定理）。

4. 中量定理

定理　设 R_{2m} 是$2m$ 维空间内一闭单联域，u 是$F(u)=0$ 在 R_{2m} 内的正规解，$(x_1^0,x_2^0,\cdots,x_m^0,y_1^0,y_2^0,\cdots,y_m^0)$ 是 R_{2m} 内任一内点，t_0是使域

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{m}(x_i-x_i^0)^2}+\sqrt{\sum_{i=1}^{m}(y_i-y_i^0)^2}<t_0$$

整个在 R_{2m} 内的正数，则当 ρ，σ 是适合不等式

$$\rho+\sigma\leqslant t_0$$

任一对正数时；u 在

$$\sum_{i=1}^{m}(x_i-x_i^0)^2=\rho^2, \quad \sum_{i=1}^{m}(y_i-y_i^0)^2=\sigma^2$$

上的中量等于它在

$$\sum_{i=1}^{m}(x_i-x_i^0)^2=\sigma^2, \quad \sum_{i=1}^{m}(y_i-y_i^0)^2=\rho^2$$

上的中量。则M是 ρ，σ 的对称函数：

$$M(\rho,\ \sigma)=M(\sigma,\ \rho).$$

证：设$M(r,\ 0)=f(r)$，则由上段的讨论，我们应有

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 M}{\partial r^2}-\dfrac{\partial^2 M}{\partial s^2}+\dfrac{m-1}{r}\dfrac{\partial M}{\partial r}-\dfrac{m-1}{s}\dfrac{\partial M}{\partial s}=0,\\ M(r,\ 0)=f(r),\\ \dfrac{\partial M}{\partial s}(r,\ 0)=0.\end{cases} \tag{9}$$

作代换 $x=\dfrac{r+s}{2}$，$y=\dfrac{r-s}{2}$，则(9)变为如下柯西问题：

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 M}{\partial x\partial y}+(m-1)\left(\dfrac{x}{x^2-y^2}\dfrac{\partial M}{\partial y}-\dfrac{y}{x^2-y^2}\dfrac{\partial M}{\partial x}\right)=0,\\ M|_{x=y}=f(2y),\\ \left(\dfrac{\partial M}{\partial x}-\dfrac{\partial M}{\partial y}\right)\Big|_{x=y}=0.\end{cases} \tag{10}$$

泛定方程为广义欧拉—波阿松方程，它含有两根奇线 $x=y$，$x=-y$，欲解(10)，我们用里曼方法。

若我们命 $x^2=\xi$，$y^2=\eta$，则(10)的泛定方程化为欧拉—波阿松方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}-\frac{(m-1)}{2}\left(\frac{1}{\xi-\eta}\frac{\partial u}{\partial\xi}-\frac{1}{\xi-\eta}\frac{\partial u}{\partial\eta}\right)=0. \qquad (11)$$

这方程的里曼函数满足

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 v}{\partial\xi\partial\eta}+\dfrac{(m-1)/2}{\xi-\eta}\dfrac{\partial v}{\partial\xi}-\dfrac{(m-1)/2}{\xi-\eta}\dfrac{\partial v}{\partial\eta}- \\ \qquad\qquad -\dfrac{m-1}{(\xi-\eta)^2}v=0, \\ v(\xi_0,\eta;\ \xi_0,\eta_0)=\left(\dfrac{\xi_0-\eta}{\xi_0-\eta_0}\right)^{\frac{m-1}{2}}, \\ v(\xi,\eta_0;\ \xi_0,\eta_0)=\left(\dfrac{\xi-\eta_0}{\xi_0-\eta_0}\right)^{\frac{m-1}{2}}.\end{cases} \qquad (12)$$

命

$$v=\frac{(\xi-\eta)^{m-1}}{(\xi-\eta_0)^{\frac{m-1}{2}}(\xi_0-\eta)^{\frac{m-1}{2}}}F(\sigma),$$

其中

$$\sigma=\frac{(\xi_0-\xi)(\eta-\eta_0)}{(\xi-\eta_0)(\xi_0-\eta)}.$$

则(12)变为

$$\begin{cases}\sigma(1-\sigma)F''+[1-(m-1+1)\sigma]F'-\dfrac{(m-1)^2}{4}F=0, \\ F(0)=1.\end{cases}$$

这是高斯方程的定解问题，方程属傅克斯方程类型。因此

$$v=\frac{(\xi-\eta)^{m-1}}{(\xi-\eta_0)^{\frac{m-1}{2}}(\xi_0-\eta)^{\frac{m-1}{2}}}F\left(\frac{m-1}{2},\ \frac{m-1}{2},1;\sigma\right).$$

由此得(10)中广义欧拉一波阿松方程的里曼函数为

$$v=\frac{(x^2-y^2)^{m-1}}{(x^2-y_0^2)^{\frac{m-1}{2}}(x_0^2-y^2)^{\frac{m-1}{2}}}F\left(\frac{m-1}{2},\ \frac{m-1}{2},1;\sigma\right)=$$

$$=\frac{(x_0^2-y^2)^{\frac{m-3}{2}}(x^2-y_0^2)^{\frac{m-3}{2}}(x^2-y^2)}{(x_0^2-y_0^2)^{m-2}}\cdot$$

$$\cdot F\left(\frac{3-m}{2},\ \frac{3-m}{2},\ 1;\ \sigma\right),$$

其中 $$\sigma=\frac{(x_0^2-x^2)(y^2-y_0^2)}{(x^2-y_0^2)(x_0^2-y^2)}.$$

利用这个里曼函数，我们来求解(10)。因为这时支柱刚巧是奇线 $x=y$，所以我们先参虑下列辅助柯西问题：

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 M}{\partial x\partial y}+(m-1)\left(\dfrac{x}{x^2-y^2}\dfrac{\partial M}{\partial y}-\dfrac{y}{x^2-y^2}\dfrac{\partial M}{\partial x}\right)=0,\\ M(y+\varepsilon,\ y)=f(2y+\varepsilon),\\ \left(\dfrac{\partial M}{\partial x}-\dfrac{\partial M}{\partial y}\right)_{x=y+\varepsilon}=0.\end{cases}$$

利用里曼公式，我们有

$$M(x_0,\ y_0)=\frac{1}{2}\left[(Mv)_{\substack{x=y_0+\varepsilon\\ y=y_0}}+(Mv)_{\substack{x=x_0\\ y=x_0-\varepsilon}}\right]-$$

$$-\int_{y_0}^{x_0-\varepsilon}\left\{\left[\frac{1}{2}\left(v\frac{\partial M}{\partial y}-M\frac{\partial v}{\partial y}\right)+aMv\right]dy-\right.$$

$$\left.-\left[\frac{1}{2}\left(v\frac{\partial M}{\partial x}-M\frac{\partial v}{\partial x}\right)+bMv\right]dx\right\}_{x=y+\varepsilon},$$

这里 a，b 分别是泛定方程中一阶导数项 $\dfrac{\partial M}{\partial x}$，$\dfrac{\partial M}{\partial y}$ 的系数。作代换 $y^2=y_0^2+[(x_0-\varepsilon)^2-y_0^2]\lambda$，$\lambda$ 是新变数，得

$$M(x_0,\ y_0)=\frac{1}{2}\left[(Mv)_{\substack{x=y_0+\varepsilon\\ y=y_0}}+(Mv)_{\substack{x=x_0\\ y=y_0-\varepsilon}}\right]-$$

$$-\frac{1}{2}\int_0^1 M\left[\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial v}{\partial y}\right)+(a-b)v\right]\frac{[(x_0-\varepsilon)^2-y_0^2]d\lambda}{\sqrt{y_0^2+[(x_0-\varepsilon)^2-y_0^2]\lambda}}.$$

上式右端积分号下 x 应代为 $\sqrt{y_0+[(x_0-\varepsilon)^2-y_0^2]\lambda}+\varepsilon$，$y$ 代为 $\sqrt{y_0^2+[(x_0-\varepsilon)^2-y_0^2]\lambda}$。

现在命 ε 趋于零，则上式右端已积分出来的部分显然为零。要能在积分号下取极限，我们注意：若 $m>2$ 则 $F\left(\frac{3-m}{2},\ \frac{3-m}{2},\ 1;\ \sigma\right)$ 和 $F'\left(\frac{3-m}{2},\ \frac{3-m}{2},1;\sigma\right)$ 都是有界的。事实上，我们知道：当 $\gamma-\alpha-\beta>0$ 时，超几何级数 $F(\alpha,\ \beta,\gamma;\ \sigma)$ 当 $|\sigma|\leqslant 1$ 时是收敛的，在我们这里 $\gamma-\alpha-\beta=m-2>0$，所以有

$$F\left(\frac{3-m}{2},\ \frac{3-m}{2},\ 1;\ 1\right)=\frac{\Gamma(m-2)}{\Gamma^2\left(\frac{m-1}{2}\right)}.$$

所以

$$\left|F\left(\frac{3-m}{2},\ \frac{3-m}{2},1;\sigma\right)\right|\leqslant\frac{\Gamma(m-2)}{\Gamma^2\left(\frac{m-1}{2}\right)},\ |\sigma|\leqslant 1.$$

同理 F' 也是有界的，所以，在积分号下，命 ε 趋于零是合法的。

当 $\varepsilon\to 0$ 时，因为

$\lim(a-b)v=$

$$=-\lim\frac{(m-1)\ (2y+\varepsilon)(x_0^2-y^2)^{\frac{m-3}{2}}[(y+\varepsilon)^2-y_0^2]^{\frac{m-3}{2}}}{(x_0^2-y_0^2)^{m-2}}F=$$

$$=-(m-1)\frac{\Gamma(m-2)}{\Gamma^2\left(\frac{m-1}{2}\right)}\cdot 2y\cdot\frac{[(x_0^2-y^2)(y^2-y_0^2)]^{\frac{m-3}{2}}}{(x_0^2-y_0^2)^{m-2}},$$

$$\lim\left(\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial v}{\partial y}\right)=$$

$$=2\cdot\frac{(x_0^2-y^2)^{\frac{m-3}{2}}}{(x_0^2-y_0^2)^{m-2}}\lim(2y+s)\left[(y+s)^2-y_0^2\right]^{\frac{m-3}{2}}F+$$

$$+\lim s\left(\frac{\partial}{\partial x}-\frac{\partial}{\partial y}\right)\left\{\frac{\left[(x_0^2-y^2)(x^2-y_0^2)\right]^{\frac{m-3}{2}}(x+y)}{(x_0^2-y_0^2)^{m-2}}F\right\}=$$

$$=\frac{\Gamma(m-2)}{\Gamma^2\left(\frac{m-1}{2}\right)}\ \frac{(x_0^2-y^2)^{\frac{m-3}{2}}(y^2-y_0^2)^{\frac{m-3}{2}}}{(x_0^2-y_0^2)^{m-2}}\cdot 4y;$$

所以

$$M(x_0,\ y_0)=$$

$$=\frac{\Gamma(m-1)}{\Gamma^2\left(\frac{m-1}{2}\right)}\int_0^1\lambda^{\frac{m-3}{2}}(1-\lambda)^{\frac{m-3}{2}}f\left(2\sqrt{y_0^2+(x_0^2-y_0^2)\lambda}\right)d\lambda,$$

或写成一般流动坐标的形式

$$M(x,\ y)=$$

$$=\frac{\Gamma(m-1)}{\Gamma^2\left(\frac{m-1}{2}\right)}\int_0^1 f\left(2\sqrt{y^2+(x^2-y^2)\lambda}\right)\lambda^{\frac{m-3}{2}}(1-\lambda)^{\frac{m-3}{2}}d\lambda.$$

综合工作并不难做。

换回原变量，则得(9)的解

$$M(r,\ s)=$$

$$=\frac{\Gamma(m-1)}{\Gamma^2\left(\frac{m-1}{2}\right)}\int_0^1 f\left(\sqrt{(r-s)^2+4rs\lambda}\right)\lambda^{\frac{m-3}{2}}(1-\lambda)^{\frac{m-3}{2}}d\lambda.$$

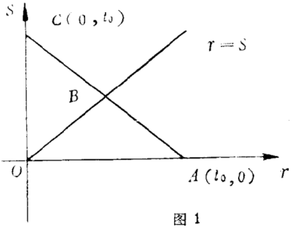


图 1

这解存在于 ΔOBA 内，而且是唯一的。

同样，若设$M(0, s)=g(s)$，则在 ΔOBC 内有

$M(r, s)=$

$$=\frac{\Gamma(m-1)}{\Gamma^2\left(\frac{m-1}{2}\right)}\int_0^1 g(\sqrt{(r-s)^2+4rs\lambda})\lambda^{\frac{m-3}{2}}(1-\lambda)^{\frac{m-3}{2}}d\lambda.$$

要这两个表达式在 $r=s$ 上代表同一个函数，必须 $f(r)\equiv g(r)$。事实上，若

$$\int_0^1[f(2r\sqrt{\lambda})-g(2r\sqrt{\lambda})]\lambda^{\frac{m-3}{2}}(1-\lambda)^{\frac{m-3}{2}}d\lambda=0,$$

则命 $2r\sqrt{\lambda}=\sqrt{t}$，$2r=\sqrt{\rho}$，就有

$$\int_0^\rho[f(\sqrt{t})-g(\sqrt{t})]\,t^{\frac{m-3}{2}}(\rho-t)^{\frac{m-3}{2}}dt=0,$$

若m是奇数，则将此式微分$\frac{m-1}{2}$次就可得

$$f(\sqrt{\rho})\equiv g(\sqrt{\rho});$$

若m是偶数，则微分$\frac{m}{2}-1$次后，就成为亚培尔积分方程：

$$\int_0^\rho \frac{[f(\sqrt{t})-g(\sqrt{t})]\, t^{\frac{m-3}{2}}}{\sqrt{\rho-t}}dt=0,$$

易知必有 $f(\sqrt{t})\equiv g(\sqrt{t})$，这就是特殊的阿斯盖生定理。

命这公共函数是 $f(r)$，则当 $\sigma+\rho\leqslant t_0$时，将有

$$M(\rho,\ \sigma)=$$

$$=\frac{\Gamma(m-1)}{\Gamma^2\left(\frac{m-1}{2}\right)}\int_0^1 f(\sqrt{(\rho-\sigma)^2+4\rho\sigma\lambda})\,\lambda^{\frac{m-3}{2}}(1-\lambda)^{\frac{m-3}{2}}d\lambda,$$

这表达式将在 ΔOAC 内适用，故 $M(\rho,\ \sigma)$ 是 ρ，σ 的对称函数。

§ 2　中量定理的逆定理

逆定理　设$(x_1^0,\ x_2^0,\cdots,x_m^0;\ y_1^0,y_2^0,\cdots,y_m^0)$是闭单联域 R_{2m} 内任一内点，t_0 是使域

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{m}(x_i-x_i^0)^2}+\sqrt{\sum_{i=1}^{m}(y_i-y_i^0)^2}\leqslant t_0$$

整个在 R_{2m} 内的正数，并当 ρ，σ 是适合不等式

$$\rho+\sigma\leqslant t_0$$

的任一对正数时，在 R_{2m} 内为正规的函数 u 适合恒等式

$$M(\rho,\ \sigma)=M(\sigma,\ \rho),$$

则 u 在 R_{2m} 内是 $F(u)=0$ 的解。

证：由 § 1的计算，在基本公式(2)中，选 u 为 R_{2m} 的正规数函，选 $v=1$，积分域V仍如上节所选择的两柱面所范围的体积，同样可引出超双曲型方程的解的中量$M(r,\ s)$，不难得到

$$\iint_V\cdots\int\sum_{i=1}^{m}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial y_i^2}\right)dV=$$

$$=r^{m-1}\int_0^s\sigma^{m-1}\frac{\partial M}{\partial r}(r,\ \sigma)d\sigma-s^{m-1}\int_0^r\rho^{m-1}\frac{\partial M}{\partial s}(\rho,s)d\rho.$$

但

$$\frac{\partial M(r,\sigma)}{\partial r}=\lim_{\Delta r\to 0}\frac{M(r+\Delta r,\sigma)-M(r,\sigma)}{\Delta r}=$$

$$=\lim_{\Delta r\to 0}\frac{M(\sigma,r+\Delta r)-M(\sigma,r)}{\Delta r}=\frac{\partial M(\sigma,r)}{\partial r},$$

所以

$$\iint_V\cdots\int\sum_{i=1}^{m}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial y_i^2}\right)dV=$$

$$=r^{m-1}\int_0^s\sigma^{m-1}\frac{\partial M}{\partial r}(\sigma,r)d\sigma-s^{m-1}\int_0^r\rho^{m-1}\frac{\partial M}{\partial s}(\rho,s)d\rho.$$

因之命 $r=s$，则上式右端为零，即当 $r=s\leqslant\frac{t_0}{2}$ 时，上式的左端亦将恒为零，这表示 $\sum_{i=1}^{m}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial y_i^2}\right)$ 在 $(x_i^0,\ y_i^0)$ 处为零。因 $(x_i^0,\ y_i^0)$ 是 R_{2m} 内的任意内点，所以 u 在 R_{2m} 内是 $F(u)=0$ 的解。

§ 3 体积中量公式

1. 基本公式、基本解

考虑超双曲型方程

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}=\sum_{j=1}^{l}\frac{\partial^2 u}{\partial y_j^2},\qquad (2\leqslant n<l)\tag{13}$$

对于自共轭算子

$$F=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}-\sum_{j=1}^{l}\frac{\partial^2}{\partial y_j^2},\qquad (2\leqslant n<l)$$

有基本公式

$$\mathrm{Pf}\iint_V\cdots\int[vF(u)-uF(v)]dV=$$

$$=\mathrm{Pf}\Big\{-\int_S\cdots\int\Big[\sum_{i=1}^{n}\Big(v\frac{\partial u}{\partial x_i}-u\frac{\partial v}{\partial x_i}\Big)\pi_i-$$

$$-\sum_{j=1}^{l}\Big(v\frac{\partial u}{\partial y_j}-u\frac{\partial v}{\partial y_j}\Big)\rho_j\Big]dS. \qquad (14)$$

其中S是$n+l$维空间中一适当光滑的$n+l-1$维闭曲面，dS是面积元素，V是S所范围的体积，dV是其体积元素，π_i，$(i=1,2,\cdots,n)$，ρ_j，$(j=1,2,\cdots,l)$是S上各点的内法线的方向余弦。

超双曲型方程(13)的基本解是（参看吴新谋等数学物理方程第二册）$\Gamma^{1-\frac{n+l}{2}}$，这里

$$\Gamma=\sum_{i=1}^{n}(x_i-x_i^0)^2-\sum_{j=1}^{l}(y_j-y_j^0)^2.$$

2. 超双曲型方程(13)的解的中量

在基本公式(14)中取V是满足

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i-x_i^0)^2\leqslant r^2,$$

$$\sum_{j=1}^{l}(y_j-y_j^0)^2\leqslant s^2$$

的点$(x_1,x_2,\cdots,x_n,y_1,y_2,\cdots,y_l)$所成的集，其中$(x_i^0,y_j^0)$是任一固定点，$V$的边界是由

$$S_1:\begin{cases}\sum_{i=1}^{n}(x_i-x_i^0)^2=r^2\\ \sum_{j=1}^{l}(y_j-y_j^0)^2\leqslant s^2\end{cases}$$

和

$$S_2:\begin{cases}\sum_{j=1}^{l}(y_j-y_j^0)^2=s^2,\\ \sum_{i=1}^{n}(x_i-x_i^0)<r^2\end{cases}$$

组成。在 S_1 上显然有 $\pi_i=\frac{x_i-x_i^0}{r}$，$(i=1,2,\cdots,n)$ $\rho_j=0$，$(j=1,2,\cdots,l)$；在 S_2 上有 $\rho_j=\frac{y_j-y_j^0}{s}$，$(j=1,2,\cdots,l)$，$\pi_i=0$，$(i=1,2,\cdots,n)$。

取 u 是(13)在 V 上的正规解，而 v 取为基本解 $\Gamma^{1-\frac{n+l}{2}}$，则基本公式(14)就变为

$$\mathrm{Pf}\int\cdots\int_{S_1}\left[\sum_{i=1}^{n}\left(v\frac{\partial u}{\partial x_i}-u\frac{\partial v}{\partial x_i}\right)\pi_i\right]dS=$$
$$=\mathrm{Pf}\int\cdots\int_{S_2}\left[\sum_{j=1}^{l}\left(v\frac{\partial u}{\partial y_j}-u\frac{\partial v}{\partial y_j}\right)\rho_j\right]dS.$$

仿上节的计算，可引出中量

$$M(r,\ s)=\int\cdots\int_{\Omega_\alpha}\int\cdots\int_{\Omega_\beta}u(x_i^0+r\alpha_i,y_j^0+s\beta_j)d\Omega_\alpha d\Omega_\beta,$$

并满足有限部分方程：

$$-r^{n-1}\,\mathrm{Pf}\int_0^s\frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{\sigma^{l-1}}{(r^2-\sigma^2)^{\frac{n+l}{2}-1}}M(r,\sigma)\right]d\sigma+$$

$$+2(2-n-l)r^n \mathrm{Pf}\int_0^s \frac{\sigma^{l-1}}{(r^2-\sigma^2)^{\frac{n+l}{2}}} M(r,\sigma)d\sigma =$$

$$= -s^{l-1}\ \mathrm{Pf}\int_0^r \frac{\partial}{\partial s}\left[\frac{\rho^{n-1}}{(\rho^2-s^2)^{\frac{n+l}{2}-1}} M(\rho,s)\right]d\rho -$$

$$-2(2-n-l)s^l\ \mathrm{Pf}\int_0^r \frac{\rho^{n-1}}{(\rho^2-s^2)^{\frac{n+l}{2}-1}} M(\rho,s)d\rho. \tag{15}$$

3. 中量$M(r,\ s)$适合的奇型柯西问题

现在简化(15).

情形 I $r>s$ 时，(15)右端每一项可以分为两项如下：

$$-s^{l-1}\ \mathrm{Pf}\int_0^s \frac{\partial}{\partial s}\left[\frac{\rho^{n-1}}{(\rho^2-s^2)^{\frac{n+l}{2}-1}} M(\rho,\ s)\right]d\rho -$$

$$-s^{l-1}\ \mathrm{Pf}\int_s^r \frac{\partial}{\partial s}\left[\frac{\rho^{n-1}}{(\rho^2-s^2)^{\frac{n+l}{2}-1}} M(\rho,\ s)\right]d\rho -$$

$$-2(2-n-l)s^l\ \mathrm{Pf}\int_0^s \frac{\rho^{n-1}}{(\rho^2-s^2)^{\frac{n+l}{2}}} M(\rho,\ s)d\rho -$$

$$-2(2-n-l)s^l\,\mathrm{Pf}\int_s^r \frac{\rho^{n-1}}{(\rho^2-s^2)^{\frac{n+l}{2}}} M(\rho,s)d\rho.$$

当$n+l$为奇数时，右端第二、四项是实的，第一、三项是虚的，联系到(15)左端是实的，则得

$$-r^{n-1}\int_0^s \frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{\sigma^{l-1}}{(r^2-\sigma^2)^{\frac{n+l}{2}-1}} M(r,\sigma)\right]d\sigma +$$

$$+2(2-n-l)r^n\int_0^s \frac{\sigma^{l-1}}{(r^2-\sigma^2)^{\frac{n+l}{2}}} M(r,\sigma)d\sigma =$$

$$= -s^{l-1}\ \mathrm{Pf}\int_s^r \frac{\partial}{\partial s}\left[\frac{\rho^{n-1}}{(\rho^2-s^2)^{\frac{n+l}{2}-1}} M(\rho,\ s)\right]d\rho -$$

$$-2(2-n-l)s^{l}\ \mathrm{Pf}\int_{s}^{r}\frac{\rho^{n-1}}{(\rho^{2}-s^{2})^{\frac{n+l}{2}}}M(\rho,\ s)d\rho;$$

$$s^{l-1}\ \mathrm{Pf}\int_{0}^{r}\frac{\partial}{\partial s}\left[\frac{\rho^{n-1}}{(s^{2}-\rho^{2})^{\frac{n+l}{2}-1}}M(\rho,\ s)\right]d\rho-$$

$$-2(2-n-l)s^{l}\,\mathrm{Pf}\int_{0}^{s}\frac{\rho^{n-1}}{(s^{2}-\rho^{2})^{\frac{n+l}{2}}}M(\rho,s)d\rho=0. \tag{16}$$

在(16)两端对 r 求导并利用瑕积分有限部分的性质，则得

$$-\frac{\partial}{\partial r}\left\{r^{n-1}\int_{0}^{s}\frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{\sigma^{l-1}}{(r^{2}-\sigma^{2})^{\frac{n+l}{2}-1}}M(r,\sigma)\right]d\sigma\right\}+$$

$$+2(2-n-l)\frac{\partial}{\partial r}\left\{r^{n}\int_{0}^{s}\frac{\sigma^{n-1}}{(r^{2}-\sigma^{2})^{\frac{n+l}{2}}}M(r,\sigma)d\sigma\right\}=$$

$$=-s^{l-1}\frac{\partial}{\partial s}\left[\frac{r^{n-1}}{(r^{2}-s^{2})^{\frac{n+l}{2}-1}}M(r,\ s)\right]$$

$$-2(2-n-l)s^{l}\frac{r^{n-1}}{(r^{2}-s^{2})^{\frac{n+l}{2}}}M(r,\ s),$$

上式两端再对 s 求导，就可得到：

$$\frac{\partial^{2}M}{\partial r^{2}}-\frac{\partial^{2}M}{\partial s^{2}}+\frac{n-1}{r}\ \frac{\partial M}{\partial r}-\frac{l-1}{s}\ \frac{\partial M}{\partial s}=0. \tag{17}$$

当 $n+l$ 为偶数时，亦可得(17)。

情形 II　当 $r<s$ 时，仿上述讨论亦得(17)。

由中量 $M(r,\ s)$ 的定义，知 M 是 r 的偶函数，也是 s 的偶函数，因此

$$\frac{\partial}{\partial r}M(r,\ s)\bigg|_{r=0}=0,\qquad \frac{\partial}{\partial s}M(r,\ s)\bigg|_{s=0}=0.$$

所以$M(r,\ s)$适合如下两个奇型柯西问题

$$\left\{\begin{array}{ll} (17), & (r>s>0), \\ M|_{s=0}=f(r), & \\ \left.\dfrac{\partial M}{\partial s}\right|_{s=0}=0; & (r\geqslant 0) \end{array}\right. \tag{18}$$

$$\left\{\begin{array}{ll} (17), & (s>r>0), \\ M|_{r=0}=g(s), & \\ \left.\dfrac{\partial M}{\partial r}\right|_{r=0}=0. & (s\geqslant 0) \end{array}\right. \tag{18$_1$}$$

运用里曼方法，可以求得(18)与(18_1)的解[参看Copson, E. T., On a Singular Boundary Value Problem for an Equation of Hyperbolic Type, Arch, Rat, Mech, Anal, 1 (1958)]:

$$M(r,\ s)=\frac{\Gamma\left(\frac{l}{2}\right)}{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{l-1}{2}\right)r^{\frac{n-1}{2}}s^{l-2}}\cdot$$

$$\cdot\int_{r-s}^{r+s} f(\rho)\rho^{\frac{n-1}{2}}\left[s^2-(r-\rho)^2\right]^{\frac{l-3}{2}}\cdot$$

$$\cdot F\left(\frac{n-1}{2},\ \frac{3-n}{2},\ \frac{l-1}{2};\ \frac{s^2-(r-\rho)^2}{4r\rho}\right)d\rho,$$

$$(r\geqslant s>0)。\tag{19}$$

$$M(r,\ s)=\frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)s^{\frac{l-1}{2}}r^{n-2}}\cdot$$

$$\cdot\int_{s-r}^{s+r} g(\sigma)\,\sigma^{\frac{l-1}{2}}\left[r^2-(s-\sigma)^2\right]^{\frac{n-3}{2}}\cdot$$

$$\cdot F\left(\frac{l-1}{2},\ \frac{3-l}{2},\ \frac{n-1}{2};\ \frac{r^2-(s-\sigma)^2}{4s\sigma}\right)d\sigma,$$

$$(s\geqslant r>0)。\qquad (19_1)$$

要(19)，(19_1)在 $r=s$ 上代表同一个函数，必需

$$s^{l-2}g(s)=\frac{2\Gamma\left(\frac{l}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\Gamma\left(\frac{l-n}{2}\right)}\int_0^s\rho^{n-1}(s^2-\rho^2)^{\frac{l-n}{2}-1}f(\rho)d\rho.$$

(20)

4． 体积中量公式

由于

$$g(s)=M(0,\ s)=\int\cdots\int_{\Omega_\alpha}\int\cdots\int_{\Omega_\beta}u(x_i^0,y_j^0+s\beta_j)d\Omega_\alpha d\Omega_\beta=$$

$$=\frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\int\cdots\int_{\Omega_\beta}u(x_i^0,\ y_j^0+s\beta_j)d\Omega_\beta,$$

$$f(r)=M(r,\ 0)=\int\cdots\int_{\Omega_\alpha}\int\cdots\int_{\Omega_\beta}u(x_i^0+r\alpha_i,\ y_j^0)d\Omega_\alpha d\Omega_\beta$$

$$=\frac{2\pi^{\frac{l}{2}}}{\Gamma\left(\frac{l}{2}\right)}\int\cdots\int_{\Omega_\alpha}u(x_i^0+r\alpha_i,\ y_j^0)d\Omega_\alpha,$$

代入(20)得

$$s^{l-2}\pi^{\frac{n}{2}}\int\cdots\int_{\Omega_\beta}u(x_i^0,\ y_j^0+s\beta_j)d\Omega_\beta=$$

$$=\frac{2\pi^{\frac{l}{2}}}{\Gamma\left(\frac{l-n}{2}\right)}\int_0^s\rho^{n-1}(s^2-\rho^2)^{\frac{l-n}{2}-1}\cdot$$

$$\cdot\left[\int\!\!\cdots\!\!\int_{\Omega_\alpha} u(x_i^0+\rho\alpha_i,\ y_j^0)d\Omega_\alpha\right]d\rho,$$

把展布在 $\Omega_\beta(\Omega_\alpha)$上的积分化为展布在

$$\sigma_s:\quad \sum_{j=1}^{l}(y_j-y_j^0)^2=s^2,\quad \left[\sigma_\rho:\ \sum_{i=1}^{n}(x_i-x_i^0)^2=\rho^2\right]$$

上的积分，则有

$$\int\!\!\cdots\!\!\int_{\sigma_s} u(x_i^0,\ y_j^0+s\beta_j)d\sigma_s=$$

$$=\omega_{l-n}\,s\int_0^s(s^2-\rho^2)^{\frac{l-n}{2}}\left[\int\!\!\cdots\!\!\int_{\sigma_\rho} u(x_i^0+\rho\alpha_i,\ y_j^0)\,d\sigma_\rho\right]d\rho,$$

其中 $\omega_{l-n}=\dfrac{2\pi^{\frac{l-n}{2}}}{\Gamma\left(\dfrac{l-n}{2}\right)}$为 $l-n$ 维单位超球面的面积。

在上式两端关于 s 由 0 到 r 求单积分得

$$\int_0^r\left[\int\!\!\cdots\!\!\int_{\sigma_s} u(x_i^0,\ y_j^0+s\beta_j)d\sigma_s\right]ds=$$

$$=\omega_{l-n}\int_0^r\left\{\int_0^s s(s^2-\rho^2)^{\frac{l-n}{2}-1}\cdot\right.$$

$$\left.\cdot\left[\int\!\!\cdots\!\!\int_{\sigma_\rho} u(x_i^0+\rho\alpha_i,\ y_j^0)d\sigma_\rho\right]d\rho\right\}ds,\qquad(21)$$

上式左端显然是展布在

$$\sum_{j=1}^{l}(y_j-y_j^0)^2\leqslant r^2$$

上的体积分，若命 $\xi_j=y_j-y_j^0$，$(j=1,2,\cdots,l)$，再将 x_i^0，y_j^0 分别改写为 x_i，y_j，则(21)的左端就可表示成

$$\int\cdots\int_{\sum_{j=1}^{l}\xi_j^2\leqslant r^2} u(x_i,\ y_j+\xi_j)d\xi_1 d\xi_2\cdots d\xi_l,$$

而(21)的右端，改变积分顺序后为

$$\omega_{l-n}\int_0^r\left\{\left[\int_\rho^r s(s^2-\rho^2)^{\frac{l-n}{2}-1}ds\right]\left[\int\cdots\int_{\sigma_\rho} u(x_i^0+\rho\alpha_i,y_j^0)d\sigma_\rho\right]\right\}d\rho,$$

由于

$$\int_\rho^r s(s^2-\rho^2)^{\frac{l-n}{2}-1}ds=\frac{1}{l-n}(r^2-\rho^2)^{\frac{l-n}{2}},$$

因此(21)右端可表示成

$$\frac{\omega_{l-n}}{l-n}\int_0^r\left[\int\cdots\int_{\sigma_\rho}(r^2-\rho^2)^{\frac{l-n}{2}}u(x_i^0+\rho\alpha_i,\ y_j^0)d\sigma_\rho\right]d\rho,$$

若命

$$\xi_i=x_i-x_i^0,\ (i=1,2,\cdots,n),\quad \rho_1^2=\sum_{i=1}^{n}\xi_i^2$$

再将 x_i^0，y_j^0 分别改写为 x_i,y_j，则(21)式右端就可以表示为

$$\frac{\omega_{l-n}}{l-n}\int\cdots\int_{\rho_1\leqslant r}(r^2-\rho_1^2)^{\frac{l-n}{2}}u(x_i+\xi_i,y_j)d\xi_1 d\xi_2\cdots d\xi_n.$$

于是得到超双曲型方程(13)的解的体积中量公式为

$$\int\cdots\int_{\sum_{j=1}^{l}\xi_j^2\leqslant r^2} u(x_1,x_2,\cdots x_n;\ y_1+\xi_1,\ y_2+\xi_2,$$

$$\cdots,\ y_l+\xi_l)d\xi_1 d\xi_2\cdots d\xi_l=$$

$$=\frac{\omega_{l-n}}{l-n}\int\cdots\int_{\rho_1\leqslant r}(r^2-\rho_1^2)^{\frac{l-n}{2}}u(x_1+\xi_1,\cdots,$$

$$\cdots,\ x_n+\xi_n;\ y_1,y_2,\cdots,y_l)d\xi_1\cdots d\xi_n.$$

§ 4 体积中量公式与降维法

上节得到的体积中量公式，是从基本解、基本公式出发完成的，自然有一定的理论意义。我们也可以通过降维法得到上述体积中量公式。

体积中量公式或写为

$$\begin{aligned}&\int\cdots\int_{\rho\leqslant r} u(x_1,x_2,\cdots,x_n;\ y_1+\xi_1,y_2+\xi_2,\cdots,\\&\qquad y_l+\xi_l)d\xi_1d\xi_2\cdots d\xi_l=\\&=\frac{\omega_{l-n}}{l-n}\int\cdots\int_{\rho_1\leqslant r}(r^2-\rho_1^2)^{\frac{l-n}{2}}u(x_1+\xi_1,x_2+\xi_2,\cdots\\&\qquad\cdots,\ x_n+\xi_n;\ y_1,y_2,\ \cdots,y_l)d\xi_1\cdots d\xi_n,\end{aligned}$$

其中 $\rho^2=\sum\limits_{j=1}^{l}\xi_j^2$. 上式的左端积分可以写为

$$\begin{aligned}&\int\cdots\int_{\rho\leqslant r} u(x_1+\xi_1,\cdots,x_n+\xi_n,\cdots,x_l+\xi_l;\ y_1,\cdots,y_l)d\xi_1\cdots d\xi_l=\\&=\int\cdots\int_{\rho_1\leqslant r} u(x_1+\xi_1,\cdots,x_n+\xi_n,\ y_1,\cdots,y_l)\cdot\\&\qquad\cdot d\xi_1\cdots d\xi_n\int\cdots\int_{\rho_0\leqslant r^2-\rho_1^2} d\xi_{n+1}\cdots d\xi_l=\\&=V_{l-n}\int\cdots\int_{\rho_1\leqslant r}(r^2-\rho_1^2)^{\frac{l-n}{2}}u(x_1+\xi_1,\cdots,\\&\qquad\cdots,x_n+\xi_n;\ y_1,\ \cdots,\ y_l)d\xi_1\cdots d\xi_n=\\&=\frac{\omega_{l-n}}{l-n}\int\cdots\int_{\rho_1\leqslant r}(r^2-\rho^2)^{\frac{l-n}{2}}u(x_1+\xi_1,\cdots,\\&\qquad\cdots,x_n+\xi_n;\ y_1,\ \cdots,\ y_l)d\xi_1\cdots d\xi_n.\end{aligned}$$

这里 V_{l-n} 为 $l-n$ 维单位球体的体积，$\rho_0^2=\sum_{j=n+1}^{l}\xi_j^2$.

显然，这样得到的体积中量公式比从基本解、基本公式出发简便得多。但这并不减弱前述方法的理论意义。因为前者说明超双曲型方程的研究，纳入了一般理论研究的范畴，而且还将提供许多设想，例如由基本解构成的广义势，这种广义势具有什么性质？是否是解析的？这将在下节中说明。

§ 5 广义势解

1. 定义 设 $f(x_1,x_2,\cdots,x_m,y_1,y_2,\cdots,y_m)$ 是关于变元 x,y 在阿达玛意义下的正规函数（即有适当高阶连续微商的函数），瑕积分的有限部分

$$v(x_1,x_2,\cdots,x_m,y_1,\cdots y_m)=\mathrm{Pf}\int\cdots\int_S\frac{f(\bar{x},\bar{y})}{\Gamma^{m-1}}dS \quad (22)$$

称为具有密度 f 的广义势。其中 $\Gamma=\sum_{i=1}^{m}(\bar{x}_i-x_i^0)^2-\sum_{i=1}^{m}(\bar{y}_i-y_i^0)^2$ 是 $(\bar{x},\ \bar{y})$ 与 $(x,\ y)$ 两点间测地距离的平方，Γ^{1-m} 是超双曲型方程

$$F(u)\equiv\sum_{i=1}^{m}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_i}-\frac{\partial^2 u}{\partial y_i^2}\right)=0。\quad (m\geqslant 2)\ (1)$$

的基本解，S 是 R_{2m} 空间的 $2m-1$ 维超曲面。

亦可定义广义势

$$w(x_1,\cdots,x_m,y_1,\cdots,y_m)=\mathrm{Pf}\int\cdots\int_S f_1(\bar{x},\ \bar{y})\frac{\partial}{\partial\nu}\left(\frac{1}{\Gamma^{m-1}}\right)dS, \quad (23)$$

其中 ν 为超曲面 S 的补法线，由下式定义：

$$\frac{dx_1}{\frac{1}{2}\frac{\partial\mathscr{A}}{\partial\pi_1}}=\frac{dx_2}{\frac{1}{2}\frac{\partial\mathscr{A}}{\partial\pi_2}}=\cdots=\frac{dx_m}{\frac{1}{2}\frac{\partial\mathscr{A}}{\partial\pi_m}}=$$

$$=\frac{dy_1}{\frac{1}{2}\frac{\partial\mathscr{A}}{\partial\pi_{m+1}}}=\frac{dy_2}{\frac{1}{2}\frac{\partial\mathscr{A}}{\partial\pi_{m+2}}}=\cdots=\frac{dy_m}{\frac{1}{2}\frac{\partial\mathscr{A}}{\partial\pi_{2m}}}=d\nu,$$

这里

$$\mathscr{A}=\sum_{i=1}^{2m}\pi_i^2,\qquad \pi_i=\frac{\partial G}{\partial x_i},\ (i=1,2,\cdots,m),$$

$$\pi_{m+j}=\frac{\partial G}{\partial y_j},\ (j=1,2,\cdots,y_m),$$

曲面 S 的方程是

$$G(x_1,x_2,\cdots,x_m,y_1,y_2,\cdots,y_m)=0.$$

2. 广义势解

显然，当定义广义势的流形 S 与超双曲型方程(1)的特征角面的交集为空集时，广义势(22)为正常积分，显然满足超双曲型方程。一般，利用瑕积分有限部分可微商的性质，立刻得到

$$F(v)=\mathrm{Pf}\int\cdots\int_S f(\bar{x},\bar{y})F\left(\frac{1}{\Gamma^{m-1}}\right)dS=0,$$

即广义势(22)是超双曲型方程(1)的解。

同样，广义势(23)亦是超双曲型方程(1)的解。

3. 广义势解的非解析性

取广义势(22)中的 S 为 $2m$ 维空间两个柱面

$$\sum_{i=1}^{m}(\bar{x}_i-x_i)^2=r^2,\ 与\ \sum_{i=1}^{m}(\bar{y}_i-y_i)^2=s^2$$

所范围的体积的界面，其中 $x_1,\cdots,x_m,y_1,\cdots,y_m$ 是任意固定

的 $2m$ 个常数。界面 S 可分为两部分：

$$S_1: \begin{cases} \sum_{i=1}^{m}(\bar{x}_i - x_i)^2 = r^2, \\ \sum_{i=1}^{m}(\bar{y}_i - y_i)^2 \leqslant s^2; \end{cases}$$

$$S_2: \begin{cases} \sum_{i=1}^{m}(\bar{y}_i - y_i)^2 = s^2, \\ \sum_{i=1}^{m}(\bar{x}_i - x_i^2) < r^2. \end{cases}$$

我们证明：定义在 S_1 上的广义势是非解析的。

事实上，广义势

$$v_1(x_1, \cdots, x_m, y_1, \cdots, y_m) = \mathrm{Pf}\int\cdots\int_{S_1} \frac{f(\bar{x}, \bar{y})}{\Gamma^{m-1}} dS$$

$$= \mathrm{Pf}\iint_{V_{11}}\cdots\int dV_{11}\int\cdots\int_{S_{11}} \frac{f(\bar{x}, \bar{y})}{\Gamma^{m-1}} dS_{11},$$

其中 S_{11} 是$\sum_{i=1}^{m}(\bar{x}_i - x_i)^2 = r^2$，$\bar{y}_i$ 在适合$\sum_{i=1}^{m}(\bar{y}_i - y_i)^2 \leqslant s^2$ 下任意所代表的点所成的集，V_{11} 是适合$\sum_{i=1}^{m}(\bar{y}_i - y_i)^2 \leqslant s^2$的点 $\bar{y}$ 所构成的集，再命 $\bar{x}_i - x_i = r\alpha_i$，则上式右端化为

$$\mathrm{Pf}\iint_{V_{11}}\cdots\int\left[r^{m-1}\int\cdots\int_{\Omega_\alpha} \frac{f(x + r\alpha, \bar{y})}{\left[r^2 - \sum_{i=1}^{m}(\bar{y}_i - y_i)^2\right]^{\frac{m-1}{2}}} d\Omega_\alpha\right] dV_{11},$$

其中 Ω_α 是单位超球面 $\sum_{i=1}^{m}\alpha_i^2 = 1$。展布在 V_{11} 上的体积分，先计算它在超球面 $\sum_{i=1}^{m}(\bar{y}_i - y_i)^2 = \sigma^2$ 上的面积分，然后就求得之值再由 0 到 s 求积，再命 $\bar{y}_i - y_i = \sigma\beta_i$，则上式可写为

$$\mathrm{Pf}\int_0^r \sigma^{m-1}d\sigma\int\cdots\int_{\Omega_\beta} d\Omega_\beta\left\{r^{m-1}\int\cdots\int_{\Omega_\alpha}\frac{f(x+r\alpha,y+\sigma\beta)}{(r^2-\sigma^2)^{\frac{m-1}{2}}}d\Omega_\alpha\right\}.$$

若命

$$G(r,\sigma)=\int\cdots\int_{\Omega_\beta}\int\cdots\int_{\Omega_\alpha} r^{m-1}f(x+r\alpha,\ y+\sigma\beta)d\Omega_\alpha d\Omega_\beta,$$

则定义在 S_1 上的广义势写成

$$v_1(x_1,\cdots,x_m,y_1,\cdots,y_m)=\mathrm{Pf}\int_0^r\frac{\sigma^{m-1}G(r,\sigma)}{(r^2-\sigma^2)^{\frac{m-1}{2}}}d\sigma. \quad (24)$$

情形 I 当 $r>s$，(24)右端为通常意义下的积分，由于 f 是在阿达玛意义下的正规函数，故 v_1 是非解析的。

情形 II 当 $r<s$，则(24)保持，函数 v_1 是具整数阶无穷瑕积分的有限部分，由于 f 的正规性，显然 v_1 是非解析的。

同样可证明：由 S_2 及 S_1+S_2 构成的广义势也是非解析的。

超双曲型方程除具有解析解外，还具有非解析解这一事实由此得到肯定。

§6 中量定理的应用

我们首先应用阿斯盖生中量定理来考虑波动方程的柯西问题

$$\begin{cases}\Delta u-\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\sum\limits_{i=1}^m\dfrac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}-\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}=0,\\ u(x_1,x_2,\cdots,x_m,0)=\varphi_0(x_1,x_2,\cdots,x_m),\\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x_1,x_2,\cdots,x_m,0)=\varphi_1(x_1,x_2,\cdots,x_m).\end{cases}\quad (25)$$

分析：先设(25)的泛定方程有一关于 t 是偶函数的解 u 在 $\sqrt{\sum_{i=1}^{m}(x_i-x_i^0)^2}+|t|\leqslant\rho_0$ 上是正规的，则由阿斯盖生公式有

$$\int\cdots\int_{\Omega_\alpha}\int\cdots\int_{\Omega_\beta}u(x_i^0+\alpha_i r;\ \beta_1 s)d\Omega_\alpha d\Omega_\beta=$$

$$=\int\cdots\int_{\Omega_\alpha}\int\cdots\int_{\Omega_\beta}u(x_i^0+\alpha_i s;\ \beta_1 r)d\Omega_\alpha d\Omega_\beta,$$

其中 $r+s\leqslant\rho_0$ 。

命 $s=0$，就有

$$\int\cdots\int_{\Omega_\alpha}\varphi_0(x_i^0+\alpha_i r)d\Omega_\alpha=\int\cdots\int_{\Omega_\beta}u(x_i^0;\ \beta_1 r)d\Omega_\beta\ .$$

因为 u 关于 t 是偶函数，所以上式右端可以写为

$$4\int_0^1 u(x_i^0;\ \beta_1 r)d\beta_1\int\cdots\int_{\sum_{i=2}^{m-3}\beta_i^2\leqslant 1-\beta_1^2}d\beta_2\cdots$$

$$\cdots d\beta_{m-2}\int_{-\sqrt{1-\sum_{i=1}^{m-2}\beta_i^2}}^{\sqrt{1-\sum_{i=1}^{m-2}\beta_i^2}}\frac{d\beta_{m-1}}{\sqrt{1-\sum_{i=1}^{m-1}\beta_i^2}}=$$

$$=2\omega_{m-1}\int_0^1 u(x_i^0;\ \beta_1 r)(1-\beta_1^2)^{\frac{m-3}{2}}d\beta_1=$$

$$=\frac{2\omega_{m-1}}{r^{m-2}}\int_0^r u(x_i^0,\ t)(r^2-t^2)^{\frac{m-3}{2}}dt,$$

其中 ω_{m-1} 是 $m-1$ 维单位超球面积。

命

$$\omega_m Q(x_i^0;\ r)=\int\cdots\int_{\Omega_a}\varphi_0(x_i^0+\alpha_i r)\,d\Omega_a,$$

则有

$$\int_0^r u(x_i^0;t)(r^2-t^2)^{\frac{m-3}{2}}dt=\frac{\omega_m r^{m-2}}{2\omega_{m-1}}Q(x_i^0,\ r).\qquad(26)$$

上式右端是已知函数。

现在化简左端。命 $r^2=\rho$，$t^2=\tau$，则(26)就变为

$$\int_0^\rho\frac{u(x_i^0;\sqrt{\tau})}{\sqrt{\tau}}(\rho-\tau)^{\frac{m-3}{2}}d\tau=\frac{\omega_m\rho^{\frac{m-2}{2}}}{\omega_{m-1}}Q(x_i^0;\ \sqrt{\rho}).$$

(27)

若m是奇数，则$\frac{m-1}{2}$就是整数，两端对ρ求$\frac{m-1}{2}$次微商后有

$$u(x_i^0;\sqrt{\rho})=$$

$$=\frac{\omega_m}{\left(\frac{m-3}{2}\right)!\,\omega_{m-1}}\sqrt{\rho}\,\frac{d^{\frac{m-1}{2}}}{d\rho^{\frac{m-1}{2}}}\left[\rho^{\frac{m-2}{2}}Q(x_i^0;\sqrt{\rho})\right],$$

或者换回原变数，就有

$$u(x_i^0;r)=\frac{\sqrt{\pi}\,r}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)}\frac{d^{\frac{m-1}{2}}}{(dr^2)^{\frac{m-1}{2}}}\left[r^{m-2}Q(x_i^0;r)\right].$$

若m是偶数，则(27)就是亚培尔积分方程，这时$\frac{m-2}{2}$是整数，两端对ρ求$\frac{m-2}{2}$次微商，则有

$$\frac{\Gamma\left(\frac{m-1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}\int_0^\rho \frac{u(x_i^0;\ \sqrt{\tau})}{\sqrt{\tau}}(\rho-\tau)^{-\frac{1}{2}}d\tau=$$

$$=\frac{\omega_m}{\omega_{m-1}}\ \frac{d^{\frac{m-2}{2}}}{d\rho^{\frac{m-2}{2}}}\left[\rho^{\frac{m-2}{2}}Q(x_i^0;\ \sqrt{\rho})\right].$$

两端除以$(r_1-\rho)^{\frac{1}{2}}$，而后对ρ从0到r_1积分，得

$$\int_0^{r_1}\frac{u(x_i^0;\sqrt{\tau})}{\sqrt{\tau}}d\tau=$$

$$=\frac{\omega_m}{\Gamma\left(\frac{m-1}{2}\right)\sqrt{\pi}\,\omega_{m-1}}\int_0^{r_1}\frac{1}{\sqrt{r_1-\rho}}\ \frac{d^{\frac{m-2}{2}}}{d\rho^{\frac{m-2}{2}}}\left[\rho^{\frac{m-2}{2}}\cdot\right.$$

$$\left.\cdot\, Q(x_i^0;\ \sqrt{\rho})\right]d\rho.$$

再对r_1求微商，有

$$u(x_i^0;\ \sqrt{r_1})=$$

$$=\frac{\sqrt{r_1}\,\omega_m}{\sqrt{\pi}\,\omega_{m-1}\,\Gamma\left(\frac{m-1}{2}\right)}\ \frac{\partial}{\partial r_1}\int_0^{r_1}\frac{1}{\sqrt{r_1-\rho}}\ \frac{d^{\frac{m-2}{2}}}{d\rho^{\frac{m-2}{2}}}\cdot$$

$$\cdot\left[\rho^{\frac{m-2}{2}}Q(x_i^0;\ \sqrt{\rho})\right]d\rho.$$

把$\sqrt{r_1}$代为t，$\sqrt{\rho}$代为ρ，则有

$$u(x_i^0;\ t)=\frac{1}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)}\frac{\partial}{\partial t}\int_0^t\frac{\rho}{\sqrt{t^2-\rho^2}}\ \frac{d^{\frac{m-2}{2}}}{(d\rho^2)^{\frac{m-2}{2}}}\rho^{m-2}Q(x_i^0;\rho)d\rho.$$

同理，若波动方程有一关于t是奇函数的解u_1，此解在$\sqrt{\sum_{i=1}^m(x_i-x_i^0)^2}+|t|\leqslant\rho_0$是正规的，则$\frac{\partial u_1}{\partial t}$是波动方程的

关于 t 是偶函数的解。因之有

$$\frac{\partial u_1}{\partial t}(x_i^0;t)=\frac{\sqrt{\pi}\ t}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)}\frac{d^{\frac{m-1}{2}}}{(dt^2)^{\frac{m-1}{2}}}t^{m-2}Q_1(x_i^0;\ t),$$

若 m 是奇数，

$$\frac{\partial u_1}{\partial t}(x_i^0;t)=\frac{1}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)}\frac{\partial}{\partial t}\int_0^t\frac{\rho}{\sqrt{t^2-\rho^2}}\frac{d^{\frac{m-2}{2}}}{(d\rho^2)^{\frac{m-2}{2}}}[\rho^{m-2}\cdot$$

$$\cdot Q_1(x_i^0;\ \rho)]d\rho,$$ 若 m 是偶数。

其中

$$\omega_m Q_1(x_i^0;\ r)=\int\cdots\int_{\Omega_a}\varphi_1(x_i^0+\alpha_i r)\,d\Omega_a,$$

这样，就得到了 u_1。

$u+u_1$ 就是柯西问题(25)的解。

综合工作并不困难。

特例 当 $m=3$ 时，(25)的解是

$$u(x_i^0,t)=tQ_1(x_i^0;\ t)+\frac{d}{dt}tQ(x_i^0;\ t),$$

这就是著名的波阿松公式。

当 $m=2$ 时，(25)的解是

$$u(x_i^0;t)=\frac{\partial}{\partial t}\int_0^t\frac{\rho Q(x_i^0;\rho)d\rho}{\sqrt{t^2-\rho^2}}+\int_0^t\frac{\rho Q_1(x_i^0;\ \rho)d\rho}{\sqrt{t^2-\rho^2}}.$$

中量定理也可用来讨论波动方程的特征问题以及超双曲型方程的特征问题的适定性。还值得注意的是中量定理可以用来建立超双曲型方程的解的某些奇特的拓展性，从而可统一地解释不是从力学物理中提出的定解问题的不适定性。

§ 7　超双曲型方程的解的拓展性

1．特殊的拓展定理

定理 1　设 $f(x_1,x_2,\cdots,x_m,t)$ 在 $t=0$ 附近是 $(x_1,x_2,\cdots,x_m,t)$ 的连续函数，$g(x_1,x_2,\cdots,x_m,r)$ 是 $f(\bar{x}_1,\bar{x}_2,\cdots,\bar{x}_m,t)$ 在球面 O_r：

$$\sum_{i=1}^{m}(\bar{x}_i-x_i)^2+t^2=r^2$$

上的面积分：

$$g(x_1,x_2,\cdots,x_m,r)=\int\cdots\int_{O_r} f(\bar{x}_1,\cdots,\bar{x}_m,t)\,dO_r\equiv Q[f]$$

若 $g(x_1,x_2,\cdots,x_m,r)$ 在柱形域

$$0\leqslant r\leqslant r^0,\qquad \sum_{i=1}^{m}(x_i-x_i^0)^2\leqslant\varepsilon^2$$

上为已知，则它在双锥域

$$r+\sqrt{\sum_{i=1}^{m}(x_i-x_i^0)^2}\leqslant r^0$$

上也就是唯一定义的。

证：$g(x_1,x_2,\cdots,x_m,r)$ 既在柱形域已知，则体积分

$$G(x_1,x_2,\cdots,x_m,r)=\int_0^r g(x_1,x_2,\cdots,x_m,\rho)\,d\rho=$$

$$=\int\cdots\int_{\Omega} f(x_1+\xi_1,\cdots,x_m+\xi_m,t)\,d\Omega,$$

在柱形域内也就是唯一定义的， 这里 Ω 是 O_r 所包围的超球体 $\sum_{i=1}^{m}\xi_i^2+t^2\leqslant r^2$，而 $\bar{x}_i=x_i+\xi_i$。

我们可以证明 $G(x_1,x_2,\cdots,x_m,r)$ 对 x_i 是可微分的。事

实上两个体积分的差

$$G(x_1,\cdots,x_i+\Delta x_i,\cdots,x_m,r)-G(x_1,\cdots,x_i,\cdots,x_m,r)$$

可以看作 f 在 A 上的积分减去 B 上的积分，即 f 在 A 和 B 上的积分的代数和。当 Δx_i 适当小时，我们可以用以 $(x_1,\cdots,x_m,0)$ 为顶点的锥面把 A 分为很多小块，这些小块的体积可以用 $dO_r\cdot\Delta x_i\cdot\frac{\xi_i}{r}$ 表示，所以

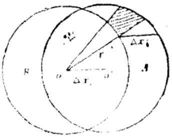


图 2

$$G(x_1,\cdots,x_i+\Delta x_i,\cdots,x_m,r)-G(x_1,\cdots,x_i,\cdots,x_m,r)=$$
$$=\frac{\Delta x_i}{r}\int\limits_{O_r}\cdots\int f(x_1+\xi_1,\cdots,x_m+\xi_m,t)\xi_i dO_r\ .$$

因此，

$$\frac{\partial G}{\partial x_i}=$$
$$=\lim_{\Delta x_i\to 0}\frac{G(x_1,\cdots,x_i+\Delta x_i,\cdots,x_m,r)-G(x_1,\cdots,x_i,\cdots,x_m,r)}{\Delta x_i}$$
$$=\frac{1}{r}\int\limits_{O_r}\cdots\int f(x_1+\xi_1,\cdots,x_m+\xi_m,t)\xi_i dO_r\ .$$

G 对 x_i 既是可微的，我们由 g 的确定，就能知道面积分

$$\int\limits_{O_r}\cdots\int(x_i+\xi_i)f(x_1+\xi_1,\cdots,x_m+\xi_m,t)dO_r=$$
$$=Q[\bar{x}_i f]=x_i g+r\frac{\partial G}{\partial x_i}\equiv D_i g\ ,$$

的值。

对 $Q[\bar{x}_i f]$ 施同样的推理，我们就有

$$Q[\bar{x}_j\bar{x}_i f]=D_j D_i g,$$

显然有

$$D_j D_i g=D_i D_j g,$$

一般有 $Q[P(\bar{x}_1,\bar{x}_2,\cdots,\bar{x}_m)f]=P(D_1,D_2,\cdots,D_m)g.$

其中 $P(\bar{x}_1,\bar{x}_2,\cdots,\bar{x}_m)$ 是 $\bar{x}_1,\bar{x}_2,\cdots,\bar{x}_m$ 的多项式。也就是说，面积分

$$\int\cdots\int_{O_r} P(x_1+\xi_1,\cdots,x_m+\xi_m)f(x_1+\xi_1,\cdots,x_m+\xi_m,t)dO_r\equiv$$

$$\equiv P(D_1,\ D_2,\ \cdots,\ D_m)g$$

将随 g 的确定而唯一确定。再由面积分化为重积分的公式，上式也可写成

$$\int\cdots\int_{\sum_{i=1}^{m}\xi_i^2\leqslant r^2}[f(x_1+\xi_1,\cdots,x_m+\xi_m,t)+$$

$$+f(x_1+\xi_1,\cdots,x_m+\xi_m,-t)]\times$$

$$\times\frac{rP(x_1+\xi_1,\cdots,x_m+\xi_m)d\xi_1\cdots d\xi_m}{\sqrt{r^2-\xi_1^2-\cdots-\xi_m^2}}=$$

$$=P(D_1,D_2,\cdots,D_m)g,$$

其中 $t=\sqrt{r^2-\xi_1^2-\cdots-\xi_m^2}$。注意 $x_i+\xi_i=\bar{x}_i$，最后得

$$Q[Pf]=\int\cdots\int_{\sum_{i=1}^{m}(\bar{x}_i-x_i)^2\leqslant r^2} rP(\bar{x},\ \cdots,\ \bar{x}_m)\times$$

$$\times\left[\frac{f(\bar{x}_1,\cdots,\bar{x}_m,t)+f(\bar{x}_1,\cdots,\bar{x}_m,-t)}{t}\right]\times$$

$$\times d\bar{x}_1 d\bar{x}_2\cdots d\bar{x}_m\ .$$

对任意 $\bar{x}_i^0$，$\bar{x}_i^0$ 是 $\sum_{i=1}^{m}(\bar{x}_i-x_i)^2<r^2$ 的点，可取正数 ρ 充分小使得 $\sum_{i=1}^{m}(\bar{x}_i-\bar{x}_i^0)^2<\rho^2$ 包含在 $(\sum_{i=1}^{m}\bar{x}_i-x_i)^2<r^2$，取

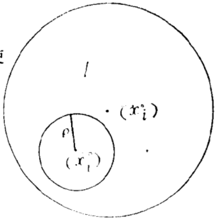


图 3

$$P\equiv P_\rho(\bar{x})=\begin{cases}\dfrac{1}{V_\rho}, & \bar{x}_i=\bar{x}_i^0,\\ 0, & \sum_{i=1}^{m}(x_i-\bar{x}_i^0)\geqslant\rho.\end{cases}$$

且使其连续，这里 V_ρ 是以 ρ 为半径的球的体积。由于多项式列在球 $\sum_{i=1}^{m}(\bar{x}_i-x_i)^2\leqslant r^2$ 内是完备列，故有多项式序列 P_n 一致收敛于 P_ρ，从而有

$$Q[P_\rho f]=\int\limits_{\sum_{i=1}^{m}(\bar{x}_i-x_i)^2\leqslant r^2}\cdots\int rP_\rho(\bar{x})\left[\frac{f(\bar{x},t)+f(\bar{x},-t)}{t}\right]\times$$

$$\times d\bar{x}_1 d\bar{x}_2\cdots d\bar{x}_m=$$

$$=r\int\limits_{\sum_{i=1}^{m}(\bar{x}_i-\bar{x}_i0)^2\leqslant\rho^2}\cdots\int P_\rho(\bar{x})\left[\frac{f(\bar{x},t)+f(\bar{x},-t)}{t}\right]\times$$

$$\times d\bar{x}_1 d\bar{x}_2\cdots d\bar{x}_m=$$

$$=rP_\rho(\bar{x}^*)\frac{f(\bar{x}^*,t^*)+f(\bar{x}^*,-t^*)}{\sqrt{r^2-\sum_{i=1}^{m}(\bar{x}_i^*-x_i)^2}}V_\rho,$$

其中 $t^*=\sqrt{r^2-\sum_{i=1}^{m}(\bar{x}_i^*-x_i)^2}$，$\bar{x}^*=(\bar{x}_1^*,\cdots,\bar{x}_m^*)$.

上式两端令 $\rho\to0$，则有

$$\lim_{\rho\to 0} Q[P_\rho f]=r\cdot\frac{f(\bar{x}_1^0,\cdots,\bar{x}_m^0,t)+f(\bar{x}_1^0,\cdots,\bar{x}_m^0,-t)}{t},$$

这里 $t=\sqrt{r^2-\sum_{i=1}^{m}(\bar{x}_i^0-x_i)^2}$ 。

这就是说，若 g 在柱形域内为已知，则函数

$$f(\bar{x}_1,\bar{x}_2,\cdots,\bar{x}_m,t)+f(\bar{x}_1,\bar{x}_2,\cdots,\bar{x}_m,-t)$$

在球面 O_r 上的值就是唯一确定的。

因此当 r 变动时，我们就能知

$$f(\bar{x}_1,\bar{x}_2,\cdots,\bar{x}_m,t)+f(\bar{x}_1,\bar{x}_2,\cdots,\bar{x}_m,-t)$$

在超球

$$\sum_{i=1}^{m}(\bar{x}_i-x_i^0)^2+t^2\leqslant(r^0)^2$$

上所有点上的值。由此易证 g 在双锥域

$$r+\sqrt{\sum_{i=1}^{m}(x_i-x_i^0)^2}<r^0,$$

上的值也唯一确定。这是由于

$$\sum_{i=1}^{m}(\bar{x}_i-x_i^0)^2+t^2=\sum_{i=1}^{m}(x_i+\xi_i-x_i^0)^2+t^2\leqslant$$

$$\leqslant\sum_{i=1}^{m}[(x_i-x_i^0)^2+2|x_i-x_i^0||\xi_i|+\xi_i^2]+t^2\leqslant$$

$$\leqslant r^2+2\sum_{i=1}^{m}|x_i-x_i^0|r+\sum_{i=1}^{m}(x_i-x_i^0)^2=$$

$$=\left(r+\sqrt{\sum_{i=1}^{m}(x_i-x_i^0)^2}\right)^2\leqslant(r^0)^2.$$

系 设 f 关于 t 是偶函数，则若 g 在柱形域上已知，f 就在超球

$$\sum_{i=1}^{m}(\bar{x}_i-x_i^0)^2+t^2\leqslant(r^0)^2$$

上是唯一唯定的。

应用定理1，结合上面阿斯盖生定理，我们可以深入地讨论超双曲型方程的解的性质。

2. 解的拓展性

设 $u(x_1,x_2,\cdots,x_m,t;y_1,y_2,\cdots,y_l)$ 是超双曲型方程

$$\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\sum_{i=1}^{l}\frac{\partial^2 u}{\partial y_i^2}\quad (m\geqslant 1,\ l\geqslant 2) \tag{28}$$

在 R_{l+m+1} 域内正规的、关于 t 是偶函数的解。设域

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{m}(x_i-x_i^0)^2+t^2}+\sqrt{\sum_{i=1}^{l}(y_i-y_i^0)^2}\leqslant R_0$$

整个包含在 R_{l+m+1} 内，因之 $u(x_1,\ \cdots,\ x_m,\ 0;\ y_1,\ \cdots,\ y_l)=$
$=\psi(x_1,\cdots,x_m;y_1,\cdots,y_l)$ 应在

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{m}(x_i-x_i^0)^2}+\sqrt{\sum_{i=1}^{l}(y_i-y_i^0)^2}\leqslant R_0 \tag{29}$$

上定义。事实上，我们有

定理 2 若 $\psi(x_1,\cdots,x_m;\ y_1,\cdots,y_l)$ 在域

$$\sum_{i=1}^{m}(x_i-x_i^0)^2\leqslant \varepsilon^2,\quad \sum_{i=1}^{l}(y_i-y_i^0)^2\leqslant R_0^2 \tag{30}$$

内是定义的，则它就必然在域(29)内是定义的，即：ψ 在(30)内的值，就足以唯一确定它在(29)内的值。

证：由阿斯盖生公式有

$$M(0,r)=M(r,0),\ \left(0\leqslant r\leqslant R_0-\sqrt{\sum_{i=1}^{l}(y_i-y_i^0)^2}\right),$$

其中 $M(0,\ r)$ 是 u 在 $\sum_{i=1}^{p}(\overline{y}_i-y_i)^2\leqslant r^2$ 上的体积中量，$M(r,\ 0)$ 是 u 在 $\sum_{i=1}^{p-1}(\overline{x}_i-x_i)^2+t^2\leqslant r^2$ 上的体积中量，p 是 $m+1$ 和 l 中的较大者，因之，在上两不等式中，可能有某些 $\overline{x}_i$ 或

某些 $\bar{y}_i$ 是虚拟变数。因 ψ 在(30)上已定，故$M(0,r)$也就在(30)上为已定。因此$M(r,0)$也在(30)上为已定。

这里有两种情形可能发生：

情形 I 若$m+1\geqslant l$，由上面指出的特殊的阿斯盖生公式，则有

$$\iint\limits_{\sum_{i=1}^{m}\xi_i^2+t^2\leqslant r^2}\cdots\int \psi(x_1,\cdots,x_m;\ y_1+\xi_1,\cdots,y_l+\xi_l)d\xi_1\cdots d\xi_m dt=$$

$$=\iint\limits_{\sum_{i=1}^{m}\xi_i^2+t^2\leqslant r^2}\cdots\int u(x_1+\xi_1,\cdots,x_m+\xi_m,t;\ y_1,\cdots,y_l)d\xi_1\cdots d\xi_m dt\,.$$

两端对 r 求微商得

$$\int\limits_{O_r}\cdots\int\psi(x_1,\cdots,x_m;\ y_1+\xi_1,\cdots,y_l+\xi_l)dO_r=$$

$$=\int\limits_{O_r}\cdots\int u(x_1+\xi_1,\cdots,x_m+\xi_m,t;y_1,\cdots,y_l)dO_r,$$

其中 O_r 是球面$\sum_{i=1}^{m}\xi_i^2+t^2=r^2$，$dO_r$ 是其上的面积元素。

由于左端已知，右端就唯一确定了，根据定理 1 的系，u 就必然在(29)上是唯一确定的。

情形 II 若$m+1<l$，这时由特殊的阿斯盖生公式有

$$\iint\limits_{\sum_{i=1}^{l}\xi_i^2<r^2}\cdots\int \psi(x_1,\cdots,x_m;\ y_1+\xi_1,\cdots,y_l+\xi_l)d\xi_1\cdots d\xi_l=$$

$$=\iint\limits_{\sum_{i=1}^{l}\xi_i^2<r^2}\cdots\int u(x_1+\xi_1,\cdots,x_m+\xi_m,t;\ y_1,\cdots,y_l)d\xi_1\cdots d\xi_l=$$

$$=\frac{\omega_{l-m-1}}{l-m-1}\int\cdots\int_{\sum\limits_{i=1}^{m}\xi_i^2+t^2\leqslant r^2}\left(r^2-\sum_{i=1}^{m}\xi_i^2-t^2\right)^{\frac{l-m-1}{2}}\times$$

$$\times u(x_1+\xi_1,\cdots,x_m+\xi_m,t;\ y_1,\cdots,y_l)d\xi_1\cdots d\xi_m dt=$$

$$=\frac{\omega_{l-m-1}}{l-m-1}\int_0^r d\rho\left\{\int\cdots\int_{S_\rho}\left(r^2-\sum_{1}^{m}\xi_i^2-t^2\right)^{\frac{l-m-1}{2}}\times\right.$$

$$\left.\times u(x_1+\xi_1,\cdots,x_m+\xi_m,t;\ y_1,\cdots,y_l)dS_\rho\right\};$$

其中 S_ρ 是球面 $\sum\limits_{i=1}^{m}\xi_i^2+t^2=\rho^2$，$dS_\rho$ 是其上的面积元素。

命

$$J(\rho)=\frac{\omega_{l-m-1}}{l-m-1}\int\cdots\int_{S_\rho}u(x_1+\xi_1,\cdots,x_m+\xi_m,t;\ y_1,\cdots,y_l)dS_\rho,$$

则上式可以写为

$$M(r,\ 0)=\int_0^r J(\rho)(r^2-\rho^2)^{\frac{l-m-1}{2}}d\rho.$$

再命 $\rho^2=\rho_1$，$r^2=r_1$，则有

$$M(\sqrt{r_1},\ 0)=\frac{1}{2}\int_0^{r_1}\frac{J(\sqrt{\rho_1})}{\sqrt{\rho_1}}(r_1-\rho_1)^{\frac{l-m-1}{2}}d\rho_1,$$

对 $J(\sqrt{\rho_1})$ 说，这是一个可化为亚倍尔方程的积分方程，所以由于左端为已知，$J(\rho)$ 也就唯一确定了。$J(\rho)$ 既当 ρ 在 $[0,r_0]$ 上，$\sum\limits_{1}^{m}(x_i-x_i^0)^2\leqslant\delta^2$ 时确定，根据定理 1 系，u 就必然在(29)上是唯一确定的。

3. 应用

定理 3 柯西问题

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 u}{\partial y_1^2}-\dfrac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}-\dfrac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}-\dfrac{\partial^2 u}{\partial x_3^2}=0,\\ u(y_1;\ x_1,x_2,0)=\psi(y_1;\ x_1,x_2),\\ \dfrac{\partial u}{\partial x_3}(y_1;\ x_1,x_2,0)=0\end{cases}$$

一般是不可能的。

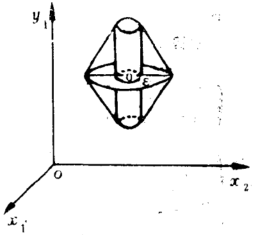


图 4

证：由$\dfrac{\partial u}{\partial x_3}(y_1;x_1,x_2,0)=0$可以认为$u$关于$x_3$是偶函数（参看吴新谋等《数学物理方程》第五章§4）。由定理2知$\psi(y_1;x_1,x_2)$在域

$$(x_1-x_1^0)^2+(x_2-x_2^0)^2\leqslant\varepsilon^2,$$
$$|y_1-y_1^0|\leqslant a$$

上是定义的，则它在域

$$\sqrt{(x_1-x_1^0)^2+(x_2-x_2^0)^2}+|y_1-y_1^0|\leqslant a$$

上就必然是唯一确定的，因此任给ψ就不一定有解。

定理 4　超双曲型方程的柯西问题

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 u}{\partial y_1}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y_2}-\dfrac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}-\dfrac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}=0,\\ u(y_1,y_2;\ x_1,0)=\psi(y_1,y_2;x_1),\\ \dfrac{\partial u}{\partial x_2}(y_1,y_2;\ x_1,0)=0\end{cases}$$

的解一般是不存在的。

证：由定理2，若$\psi(y_1,y_2;\ x_1)$在域

$$\sqrt{(y_1-y_1^0)^2+(y_2-y_2^0)^2}\leqslant a,\quad |x_1-x_1^0|\leqslant\varepsilon$$

上是定义的，则它在域

$$|x_1-x_1^0|+\sqrt{(y_1-y_1^0)^2+(y_2-y_2^0)^2}\leqslant a$$

上就必然是唯一确定的。

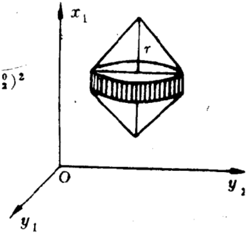


图 5

定理 5　柯西问题

$$\begin{cases}\sum_{i=1}^{m}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}=0,\\ u(x_1,x_2,\cdots,x_{m-1},0)=\\ \qquad =\psi(x_1,x_2,\cdots,x_{m-1}),\\ \dfrac{\partial u}{\partial x_m}(x_1,x_2,\cdots,x_{m-1},0)=0\end{cases}$$

的解一般是不存在的。

证： 设 u 在球 $\sum_{i=1}^{m-1}(x_i-x_i^0)^2+x_m^2\leqslant a^2$ 上是存在的。若 $\psi(x_1,x_2,\cdots,x_{m-1})$ 在域

$$\sum_{i=1}^{m-1}(x_i-x_i^0)^2\leqslant \varepsilon^2$$

是定义的，则它在域

$$\sum_{i=1}^{m-1}(x_i-x_i^0)^2\leqslant a^2$$

将是唯一确定的。

从解的拓展性质已经看出：

(1) 波动方程的柯西问题受到支柱的限制。当支柱是空向曲面时，问题是适定的，当支柱为时向时，定解问题一般不可能。

(2) 上面的讨论，只指出哪些问题不可能，并没有考虑

在什么补充限制下，这些问题又会有解，甚至适定。

这个问题的提出是有意义的，一方面由于热导方程定解问题可能性的讨论中引出2类函数，真正解决了问题，并且也给函数论开辟了园地，因此估计超双曲型方程的这类问题，可能引起多实变函数论的发展，另一方面，诚如索波列夫所说，这种定性理论的问题，也可能大大有助于定解问题的解决。

第三章　中量定理的推广

§ 1　有关超双曲型方程的一个恒等式

1. 基本公式、正规解

考虑超双曲型方程

$$F(u)\equiv\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial y_1^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial y_2^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial y_3^2}=0, \quad (1)$$

这方程是自伴的。显然有基本公式

$$\overbrace{\iint_V\cdots\int}^{6}[vF(u)-uF(v)]dV=$$

$$=\overbrace{\int_S\cdots\iint}^{5}\Big[\sum_{i=1}^{3}\Big(v\frac{\partial u}{\partial x_i}-u\frac{\partial v}{\partial x_i}\Big)\cos(n,x_i)-$$

$$-\sum_{i=1}^{3}\Big(v\frac{\partial u}{\partial y_i}-u\frac{\partial v}{\partial y_i}\Big)\cos(n,y_i)\Big]dS。\quad (2)$$

欲得$F(v)=0$ 的 v，考虑奇型固有值问题：

$$\begin{cases}\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial^2 v}{\partial x_i^2}=0, & \sum_{i=1}^{3}(x_i-x_i^0)^2<s^2,\\ \frac{dv}{dn}+\frac{\lambda}{s}v=0, & \sum_{i=1}^{3}(x_i-x_i^0)^2=s^2.\end{cases} \quad (3)$$

在球坐标变换

$$\begin{cases} x_1 - x_1^0 = \rho\sin\theta\cos\varphi, \\ x_2 - x_2^0 = \rho\sin\theta\sin\varphi, \\ x_3 - x_3^0 = \rho\cos\theta \end{cases}$$

下，(3)变为

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho^2\dfrac{\partial v}{\partial\rho}\right) + \dfrac{1}{\sin\theta}\ \dfrac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\dfrac{\partial v}{\partial\theta}\right) + \dfrac{1}{\sin^2\theta}\ \dfrac{\partial^2 v}{\partial\varphi^2} = 0, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \rho^2 < s^2, \\ -\dfrac{dv}{d\rho} + \dfrac{\lambda}{\rho}v = 0, \qquad \rho^2 = s^2. \end{cases}$$

用分离变量法，可得这问题的解是

$$v_{m\mu} = s^m \sin^\mu\theta \cdot \frac{d^\mu P_m(\cos\theta)}{(d\cos\theta)^\mu} \cdot \begin{Bmatrix} \cos\mu\varphi \\ \sin\mu\varphi \end{Bmatrix},$$

$$P_m(x) = \frac{1}{2^m m!}\ \frac{d^m}{dx^m}(x^2-1)^m,$$

$$m = 0, 1, 2, \cdots;\ \mu = 0, 1, 2, \cdots, m.$$

同样考虑奇型固有值问题：

$$\begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{m} \dfrac{\partial^2 v}{\partial y_i^2} = 0, \qquad \sum\limits_{i=1}^{3}(y_i - y_i^0)^2 < t^2, \\ \dfrac{dv}{dn} + \dfrac{\lambda}{t}v = 0, \qquad \sum\limits_{i=1}^{3}(y_i - y_i^0)^2 = t^2. \end{cases}$$

这问题的解是

$$v_{m_1\mu_1} = t^{m_1}\sin^{\mu_1}\theta_1 \frac{d^{\mu_1}P_{m_1}(\cos\theta_1)}{(d\cos\theta_1)^{\mu_1}} \cdot \begin{Bmatrix} \cos\mu_1\varphi_1 \\ \sin\mu\varphi_1 \end{Bmatrix}$$

$$m_1 = 0, 1, \cdots;\ \mu_1 = 0, 1, 2, \cdots, m_1.$$

显然 $F(v)=0$ 的 v 可取为

$$v_{mm_1\mu\mu_1} = v_{m\mu} \cdot v_{m_1\mu_1},$$

$v_{m\mu}$，$v_{m_1\mu_1}$ 为二拉普拉斯函数。

2. 解的中量

设 u 是超双曲型方程(1)的任一解，它在不等式

$$\sum_{i=1}^{3}(x_i-x_i^0)^2\leqslant s^2,\qquad \sum_{i=1}^{3}(y_i-y_i^0)^2\leqslant t^2$$

所定义的闭域 V 内是正规的，取 $v=v_{mm_1\mu\mu_1}$，在 V 内应用基本公式(2)，V 的边界由两部分组成：

$$S_1:\begin{cases}\sum_{i=1}^{3}(x_i-x_i^0)^2=s^2,\\ \sum_{i=1}^{3}(y_i-y_i^0)^2\leqslant t^2,\end{cases}\qquad S_2:\begin{cases}\sum_{i=1}^{3}(x_i-x_i^0)^2<s^2,\\ \sum_{i=1}^{3}(y_i-y_i^0)^2=t^2.\end{cases}$$

则有

$$\overbrace{\int\cdots\int}^{5}_{S_1}\left(v\frac{du}{dn}-u\frac{dv}{dn}\right)dS=\overbrace{\int\cdots\int}^{5}_{S_2}\left(v\frac{du}{dn}-u\frac{dv}{dn}\right)dS,$$

注意到

$$v\frac{du}{dn}-u\frac{dv}{dn}=\frac{d(uv)}{dn}+2uv\frac{m}{s},\ 在\ S_1\ 上,$$

$$v\frac{du}{dn}-u\frac{dv}{dn}=\frac{d(uv)}{dn}+2uv\frac{m_1}{t},\ 在\ S_2\ 上,$$

则有

$$-s^2\frac{\partial}{\partial s}\int_0^t\sigma^2d\sigma\iint_{\Omega_\beta}d\Omega_\beta\iint_{\Omega_\alpha}uvd\Omega_\alpha+$$

$$+2ms\int_0^t\sigma^2d\sigma\iint_{\Omega_\beta}d\Omega_\beta\iint_{\Omega_\alpha}uvd\Omega_\alpha=$$

$$=-t^2\frac{\partial}{\partial t}\int_0^s\rho^2d\rho\iint_{\Omega_\beta}d\Omega_\beta\iint_{\Omega_\alpha}uvd\Omega_\alpha+$$

$$+2m_1t\int_0^s\rho^2d\rho\iint_{\Omega_\beta}d\Omega_\beta\iint_{\Omega_\alpha}uvd\Omega_\alpha.$$

在上式中命

$$\overline{M}=\iint\limits_{\Omega_\beta} d\Omega_\beta \iint\limits_{\Omega_\alpha} uv\, d\Omega_\alpha,$$

则 $\overline{M}$ 满足的方程两端对 s 和 t 求导得

$$\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\partial}{\partial s}-\frac{2(m+1)}{s}\right)t^2 s^2 \overline{M}=\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial}{\partial t}-\frac{2(m_1+1)}{t}\right)t^2 s^2 \overline{M}.$$

由此得

$$\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\partial}{\partial s}-\frac{2(m+1)}{s}\right)M_{mm_1\mu\mu_1}=\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial}{\partial t}-\frac{2(m_1+1)}{t}\right)M_{mm_1\mu\mu_1}, \tag{4'}$$

其中

$$M_{mm_1\mu\mu_1}=(st)^2\int_0^\pi \sin\theta d\theta\int_0^\pi \sin\theta_1\, d\theta_1\int_0^{2\pi} d\varphi\int_0^{2\pi} uv_{mm_1\mu\mu_1} d\varphi_1,$$

称为超双曲型方程(1)的解的中量，$\overline{M}$ 中当 $v=1$ 时即上章中定义的中量。

我们知道，当 m, m_1，μ, μ_1 取各种可能整数时 $v_{mm_1\mu\mu_1}$ 在空间 $(\theta, \varphi, \theta_1, \varphi_1)$ 形成一个完整的正交系统，换句话说，$M_{mm_1\mu\mu_1}$ 是 u 的广义付氏系数。此外，容易验明它有下列性质：

(1) $M_{mm_1\mu\mu_1}(-s, t)=M_{mm_1\mu\mu_1}(s, t)$，

$M_{mm_1\mu\mu_1}(s, -t)=M_{mm_1\mu\mu_1}(s, t)$。

(2) 当 s 趋于零时，$M_{mm_1\mu\mu_1}(s, t)$ 同 $s^{2(m+1)}$ 一样趋于零。而 t 趋于零时，也有相应性态。

这样，命

$$M_{mm_1\mu\mu_1}=s^{2(m+1)}t^{2(m_1+1)}M_{mm_1},$$

则 $M_{mm_2\mu\mu_2}$ 所满足的方程就变为

$$\frac{\partial^2 M_{mm_1}}{\partial s^2}-\frac{\partial^2 M_{mm_1}}{\partial t^2}+\frac{2(m+1)}{s}\frac{\partial M_{mm_1}}{\partial s}-$$

$$-\frac{2(m_1+1)}{t}\frac{\partial M_{mm_1}}{\partial t}=0, \tag{4}$$

这时，显然有

$$\frac{\partial M_{mm_1}}{\partial s}=0,\quad 当\ s=0,$$

$$\frac{\partial M_{mm_1}}{\partial t}=0,\quad 当\ t=0.$$

这就形成两个奇型柯西问题：

$$\begin{cases}(4),\\ M_{mm_1}|_{s=0}=f(t),\\ \left.\dfrac{\partial M_{mm_1}}{\partial s}\right|_{s=0}=0;\end{cases} \tag{5}$$

$$\begin{cases}(4),\\ M_{mm_1}|_{t=0}=g(s),\\ \left.\dfrac{\partial M_{mm_1}}{\partial t}\right|_{t=0}=0.\end{cases} \tag{6}$$

我们应当考虑 $f(t)$ 和 $g(s)$ 该有什么关系，上述两柯西问题的解，才会在 $s=t$ 上相重合。在考虑这问题之前，我们先讨论一个唯一性定理。

3. 唯一性定理

定理 若 q 是非负常数，则柯西问题

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 u}{\partial r^2}-\dfrac{\partial^2 u}{\partial s^2}+\dfrac{p}{r}\dfrac{\partial u}{\partial r}-\dfrac{q}{s}\dfrac{\partial u}{\partial s}=0,\\ u(r,0)=f(r),\ \dfrac{\partial u}{\partial s}(r,\ 0)=0\end{cases} \tag{7}$$

的解是唯一的，否则就有无穷个解。

证：若 $q<0$，则欲 $u=K(r)s^{1-q}$ 是(7)的解，只须

$$K''(r)+\frac{p}{r}K'(r)=0.$$

这时 $u(r,\ 0)=\frac{\partial u}{\partial s}(r,0)=0$，所以(7)的解可以有无穷多个。

若 $q=0$，解是唯一的，因古典唯一性定理适用。

若 $q>0$，命 $u=r^{-\frac{p}{2}}z$，则(7)的泛定方程就变为

$$\frac{\partial^2 z}{\partial s^2}-\frac{\partial^2 z}{\partial s^2}-\frac{q}{s}\frac{\partial z}{\partial s}-\frac{p}{2}\left(\frac{p}{2}-1\right)\frac{1}{r^2}z=0,$$

乘这方程两端以 $2\frac{\partial z}{\partial s}$，然后在梯形 $ABCD$ 上求积分，则因在 $s=0$ 上有 $z=\frac{\partial z}{\partial r}=\frac{\partial z}{\partial s}=0$，而有

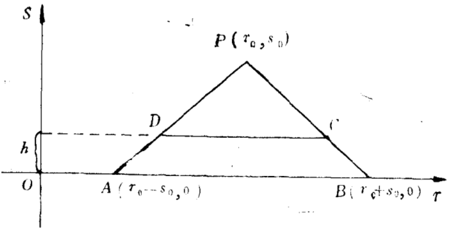


图 6

$$0=2\iint\limits_{ABCD}\frac{\partial z}{\partial s}\left[\frac{\partial^2 z}{\partial r^2}-\frac{\partial^2 z}{\partial s^2}-\frac{q}{s}\frac{\partial z}{\partial s}-\frac{p}{2}\left(\frac{p}{2}-1\right)\frac{z}{r^2}\right]dr\,ds=$$

$$=\iint\limits_{ABCD}\left[2\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial z}{\partial r}\frac{\partial z}{\partial s}\right)-\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)^2-\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\partial z}{\partial s}\right)^2-\right.$$

$$\left.-\frac{2q}{s}\left(\frac{\partial z}{\partial s}\right)^2-\frac{p}{2}\left(\frac{p}{2}-1\right)\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{z}{r}\right)^2\right]dr\,ds=$$

$$=2\int\limits_{BC+DA}\frac{\partial z}{\partial r}\frac{\partial z}{\partial s}ds+\int\limits_{BC+CD+DA}\left[\left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial s}\right)^2+\right.$$

$$\left.+\frac{p}{2}\left(\frac{p}{2}-1\right)\left(\frac{z}{r}\right)^2\right]dr-2q\iint\limits_{ABCD}\frac{1}{s}\left(\frac{\partial z}{\partial s}\right)^2dr\,ds=$$

$$=\int\limits_{BC}\left(\frac{\partial z}{\partial r}-\frac{\partial z}{\partial s}\right)^2dr+\int\limits_{CD}\left[\left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial s}\right)^2\right]dr+$$

$$+\int\limits_{DA}\left(\frac{\partial z}{\partial r}+\frac{\partial z}{\partial s}\right)^2dr+\int\limits_{BC+CD+DA}\frac{p}{2}\left(\frac{p}{2}-1\right)\left(\frac{z}{r}\right)^2dr-$$

$$-2q\int\limits_{ABCD}\frac{1}{s}\left(\frac{\partial z}{\partial s}\right)^2dr\,ds.$$

因 $q>0$，所以若$\frac{p}{2}\left(\frac{p}{2}-1\right)>0$，则要这个数值等于零，非得 z 和$\frac{\partial z}{\partial s}$在梯形的上底$CD$上为零不可（由于 $dr<0$，此时等式右边的积分均为负）。根据古典唯一性定理就知道 z 和$\frac{\partial z}{\partial s}$在三角形 PDC 上恒等于零。因 h 可以取得任意小，所以在三角形 PAB 上就非恒等于零不可，唯一性就证明了。

若$\frac{p}{2}\left(\frac{p}{2}-1\right)<0$，则可写

$$2\int_{BC+DA}\frac{\partial z}{\partial r}\frac{\partial z}{\partial s}ds+\int_{BC+CD+DA}\left[\left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial s}\right)^2\right]dr=$$

$$=\iint_{ABCD}\left[\frac{2q}{s}\left(\frac{\partial z}{\partial s}\right)^2+\frac{2\cdot\frac{p}{2}\left(\frac{p}{2}-1\right)}{r^2}z\frac{\partial z}{\partial s}\right]drds.$$

但我们又有恒等式

$$\int_{BC+CD+DA}Qz^2dr=-\iint_{ABCD}\frac{\partial}{\partial s}(Qz^2)dsdr,$$

其中

$$Q=2A\left[\frac{1}{2r^2}-\frac{2q}{A(h^2-s^2)+4qr^2}\right],\quad 2A=\frac{p}{2}\left(\frac{p}{2}-1\right).$$

因之有

$$2\int_{BC+DA}\frac{\partial z}{\partial r}\frac{\partial z}{\partial s}ds+\int_{BC+CD+DA}\left[\left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial s}\right)^2+Qz^2\right]dr=$$

$$=\iint_{ABCD}\left[2\cdot\frac{q}{s}\left(\frac{\partial z}{\partial s}\right)^2+2\left(\frac{\frac{p}{2}\left(\frac{p}{2}-1\right)}{r^2}-Q\right)z\frac{\partial z}{\partial s}-\frac{\partial Q}{\partial s}z^2\right]\cdot dsdr.$$

这时右端重积分号下是 z 和$\frac{\partial z}{\partial s}$的平方式，因此重积分是正的。而左端的积分则应是负的。要上边的等式成立，势必 z，$\frac{\partial z}{\partial s}$在$CD$上恒等于零。

注意 1 在上述证明中，显然应假定 $r_0\neq s_0$，否则点 A 将是原点，而代换 $u=r^{-\frac{p}{2}}z$ 将不合法，但若假定解在 $r=s$ 仍存在并连续，则这个解在 $r=s$ 上仍应是唯一的。

注意 2 在上述证明中，显然应假定

$$\iint \frac{1}{s}\left(\frac{\partial z}{\partial s}\right)^2 dr ds$$

存在。

注意 3 这定理还可以推广到 p，q 不是常数时的方程，此时 Q 满足的黎加梯方程不一定可直接解出。

4. 奇型柯西问题的解

通过唯一性定理的讨论，对奇型柯西问题(5)和(6)显然有：若 $m+1\geqslant 0$，则(5)的解是唯一的；若 $m+1<0$，则(5)的解不是唯一的。若 $m_1+1\geqslant 0$，则(6)的解是唯一的；若 $m_1+1<0$，则(6)的解不是唯一的。

为了解决这两个特殊的（支柱是奇线）柯西问题，我们先用里曼方法解决下面普通的柯西问题：

$$\begin{cases} (4), \\ M_{mm_1}\Big|_{s=\varepsilon_1} = f(t), \quad \dfrac{\partial M_{mm_1}}{\partial s}\Big|_{s=\varepsilon_1} = 0, \end{cases} \tag{5_1}$$

和

$$\begin{cases} (4), \\ M_{mm_1}\Big|_{t=\varepsilon_2} = g(s), \quad \dfrac{\partial M_{mm_1}}{\partial t}\Big|_{t=\varepsilon_2} = 0, \end{cases} \tag{6_1}$$

其中 ε_1，ε_2 是小常数。

但(4)的里曼函数是

$$v = A\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m_1}\frac{(-1)^{i+j}(m+i)!(m_1+j)!x_1^i y_1^j}{i!j!(m-i)!(m_1-j)!(i+j)!},$$

其中

$$A = s^{m+1}t^{m_1+1}s_0^{-(m+1)}t_0^{-(m_1+1)},$$

$$x_1 = \frac{(s+t-s_0-t_0)(s-t-s_0+t_0)}{4ss_0},$$

$$y_1=\frac{(s+t-s_0-t_0)(s-t-s_0+t_0)}{4tt_0},$$

故(5_1)和(6_1)的解都可用里曼公式表示。

在(5_1)和(6_1)的解里，分别命 s_1，s_2 趋于零，我们就得到(5)的解 $U(s_0,\ t_0)$和(6)的解 $U_1(s_0,\ t_0)$分别是：

$$U=\frac{1}{2}\frac{(2m+1)!}{m!}\int_{x_0}^{-y_0}$$

$$\sum_{j=0}^{m}\frac{[m_1]_j[(\beta+x_0)(-\beta-y_0)]^{j+m}(2\beta)^{m_1-j+1}f(2\beta)d\beta}{j!(j+m)!(x_0+y_0)^{2m+1}(x_0-y_0)^{j+m_1+1}},$$

$$U_1=\frac{1}{2}\frac{(2m_1+1)!}{m_1!}\int_{x_0}^{y_0}$$

$$\sum_{i=0}^{m}\frac{[m]_i[(\beta-x_0)(\beta-y_0)]^{i+m_1}(2\beta)^{m-i+1}g(2\beta)d\beta}{i!(i+m_1)!(x_0+y_0)^{i+m+1}(x_0-y_0)^{2m_1+1}},$$

其中

$$s_0+t_0=x_0,\quad s_0-t_0=y_0,\quad [m]_i=(-1)\frac{i(m+i)!}{(m-i)!}.$$

综合工作并不难做。

5. 解的恒等式

欲上二解在 $s_0=t_0$ 上重合，我们必需有

$$Q(x_0)\equiv\frac{(2m_1+1)!}{m_1!}x_0^{m+1}\cdot$$

$$\cdot\int_0^{x_0}\sum_{i=0}^{m}\frac{[m]_i2^{m-i+1}(x_0-\beta)^{i+m_1}\beta^{m+m_1+1}g(2\beta)d\beta}{i!(i+m_1)!x_0^{i}}=$$

$$=\frac{(2m+1)!}{m!}x_0^{m_1+1}\cdot$$

$$\cdot\int_0^{x_0}\sum_{j=0}^{m_1}\frac{[m_1]_j2^{m_1-j+1}(x_0-\beta)^{j+m}\beta^{m+m_1+1}f(2\beta)d\beta}{j!(j+m)!x_0^{j}}\equiv$$

$$\equiv Q_1(x_0),\tag{8}$$

若当 t，s 都小于R时，u 是(1)的正规解，则(8)就必需在$\left[0,\frac{R}{2}\right]$上得到满足。

(1) 若 $m>m_1$，则 $g(s)$必需有 $m-m_1$ 阶微商，若已知 $f(t)$，则(8)就是 $g(s)$的伏特拉第一类积分方程。命

$$G(x_0)=\int_0^{x_0}\frac{(x_0-\beta)^{m+m_2}\beta^{m+m_2+1}}{(i+m_1)!}g(2\beta)d\beta,$$

则(8)就变成G的欧拉方程

$$\frac{(2m_1+1)!}{m_1!}\sum_{i=1}^{m}\frac{[m]_i(2x_0)^{m-i+1}}{i!}G^{(m-i)}(x_0)=Q_1(x_0),$$

这个欧拉方程的特证方程是

$$\sum_{i=0}^{m}\frac{[m]_i\,2^{m-i}}{i!}\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-m+i+1)=$$

$$=2^m(\alpha-1)(\alpha-3)\cdots(\alpha-2m+1)=0.$$

所以

$$G(x_0)=x_0(c_1+c_2x_0^2+\cdots+c_mx_0^{2m-2})+$$

$$+\frac{m_1!}{(2m_1+1)!(m-1)!}\int_0^{x_0}\frac{x_0(x_0^2-\lambda^2)^{m-1}}{\lambda(2\lambda)^{m-1}}Q_1(\lambda)d\lambda,$$

其中 $c_1,c_2,\cdots,c_m$ 都是常数，这些常数都应该是零，因为当 x_0趋于零时G和右端积分都是和 $x_0^{2(m+m_2+1)}$同阶无穷小，因之

$$g(2x_0)=\frac{m_1!}{(m-1)!(2m+1)!}\ \frac{d^{m+m_2+1}}{dx_0^{m+m_2+1}}x_0^{-m}$$

$$\int_0^{x_0}\frac{(x_0^2-\lambda^2)^{m-1}}{\lambda(2\lambda)^{m-1}}Q_1(\lambda)d\lambda. \qquad (9)$$

若已知 $g(s)$，则(8)也是 $f(t)$的一个伏特拉第一类积分方程而有

$$f(2x_0)=\frac{m!}{(m_1-1)!\,(2m_1+1)!}\;\frac{d^{m+m_1+1}}{dx_0^{\,m+m_1+1}}x_0^{-m_1}$$

$$\int_0^{x_0}\frac{(x_0^2-\lambda^2)^{m_1-1}}{\lambda(2\lambda)^{m_1-1}}\,Q(\lambda)d\lambda. \qquad (10)$$

(2) 若 $m_1>m$，则 $f(t)$ 必需有 m_1-m 阶微商。若已知 $f(t)$，则仍有(9)，若已知 $g(s)$，则仍有(10)。

(3) 若 $m_1=m$，则有 $f(t)\equiv g(t)$。特例 $m=m_1=0$ 时则得阿斯盖生定理。

6. 进一步推广

考虑更一般超双曲型方程

$$\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}+p(x_1,x_2,x_3)u=\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial^2 u}{\partial y_i^2}+q(y_1,y_2,y_3)u, \quad (11)$$

这就引导我们考虑下列固有值问题：求定 λ 使下述混杂问题有非零解

$$\begin{cases}\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}+p(x_1,x_2,x_3)u=0, & \text{在 } V_1:\sum_{i=1}^{3}(x_i-x_i^0)^2<s^2 \text{ 内},\\ \frac{\partial u}{\partial n}+\lambda u=0; & \text{在 } V_1 \text{ 的边界 } S_1 \text{ 上},\end{cases}$$

n 是 S_1 上的内法线。

这问题有非零解。而且若 $0<A<p(x_1, x_2, x_3)<B$，那末，问题的固有值是

$$\lambda_{i-1}=\frac{m}{s}-\frac{\alpha s}{2m+3}+so(1),$$

其中 $A\leqslant\alpha\leqslant B$，$o(1)$ 和 s 同时趋于零，而且

$$m^2+1\leqslant i\leqslant(m+1)^2,\quad m=0,1,2,\cdots$$

注意，α 可能有 $2m+1$ 个不同的值，α 和 $o(1)$ 都是 x_1^0，x_2^0，x_3^0 的函数。

命相应于这些固有值的固有函数是

$$v_{m\mu}(x_1,x_2,x_3;\ x_1^0,x_2^0,x_3^0),$$

其中 $m=0,1,2,\cdots;\ \mu=1,2,\cdots,2m+1$.

同理，混杂问题

$$\begin{cases}\sum_{i=1}^{3}\dfrac{\partial^2 u}{\partial y_i^2}+q(y_1,y_2,y_3)u=0, & \text{在 } V_2: \sum_1^3(y_i-y_i^0)^2<t^2 \text{ 内,}\\ \dfrac{\partial u}{\partial n}+\rho u=0, & \text{在 } V_2 \text{ 的边界 } S_2 \text{ 上,}\end{cases}$$

n 是 S_2 的内法线。问题的固有值是

$$\rho_{t-1}=\frac{m}{t}-\frac{\alpha_1 t}{2m_1+3}+t\ o(1).$$

设相应于这个固有值的固有函数是

$$\bar{v}_{m_1\mu_1}(y_1,y_2,y_3;\ y_1^0,y_2^0,y_3^0),$$

其中 $m_1=0,1,2,\cdots;\mu_1=1,2,\cdots,2m_1+1$.

因之，$v_{m\mu}\cdot\bar{v}_{m_1\mu_1}$ 将恒是(11)的解。

仿前讨论，从基本公式出发，若 u 是(11)在

$$\sum_1^3(x_i-x_i^0)^2\leqslant s^2,\qquad \sum_1^3(y_i-y_i^0)^2\leqslant t^2$$

内的任一正规解，连系于伴随算子的函数取为 $v_{m\mu}\cdot\bar{v}_{m_1\mu_1}$，则可得与(4*)极相似的广义欧拉-波阿松方程

$$\frac{\partial}{\partial s}\left[\frac{\partial}{\partial s}-2\lambda(s)-\frac{2}{s}\right]M=\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{\partial}{\partial t}-2\rho(t)-\frac{2}{t}\right]M, \quad (12)$$

其中

$$M=(st)^2\int_0^\pi\sin\theta d\theta\int_0^\pi\sin\theta_1\,d\theta_1\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{2\pi}uv_{m\mu}\bar{v}_{m_1\mu_1}d\varphi_1.$$

这样定义的M具有什么性质，还有待于对M和对(12)深入地了解。

§ 2　某广义欧拉-波阿松方程的研究

在方程(12)中取

$$\lambda(s)=\frac{m}{s}+s\varphi(s^2),$$

$$\rho(t)=\frac{m_1}{t}+t\varphi_1(t^2),$$

则(12)为如下形式：

$$\frac{\partial}{\partial s}\left[\frac{\partial}{\partial s}-\frac{2(m+1)}{s}-2s\varphi(s^2)\right]M=$$

$$=\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{\partial}{\partial t}-\frac{2(m_1+1)}{t}-2t\varphi_1(t^2)\right]M,$$

再经过适当的函数变换，上方程可化为

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\left[\frac{2(m+1)}{r}+2r\varphi(r^2)\right]\frac{\partial u}{\partial r}=$$

$$=\frac{\partial^2 u}{\partial s^2}+\left[\frac{2(m_1+1)}{s}+2s\varphi_1(s^2)\right]\frac{\partial u}{\partial s}.\quad(13)$$

为把这一方程的讨论深入下去，有必要研究(13)的里曼函数在奇线附近的性质。

(13)中m,m_1是零或正整数，φ,φ_1是正规函数，并假定$\varphi(0)\neq0$，$\varphi_1(0)\neq0$。

我们知道，想把里曼函数用具体形式表示出来，一般说是困难的，(13)的里曼函数正是如此。然而，对于含奇线的双曲型方程，研究里曼函数在奇线附近的性质，对于进一步解奇型定解问题，对于探讨解的性质，无疑是有决定性作用的。

定理　方程(13)的里曼函数 $v(r,s;\ r_0,s_0)$必将取如下

形式：

$$v(r,s;\ r_0,s_0)=rsF(r,s;\ r_0,s_0),$$

其中F是正规的函数。

证：我们暂把(13)放在一边。而考虑方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\left[\frac{2(m+1)}{r}+2r\varphi(r^2)\right]\frac{\partial u}{\partial r}=\frac{\partial^2 u}{\partial s^2} \tag{14}$$

的里曼函数。

作自变量代换，$r=x-y$；$s=x+y$，方程(14)变为

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x\partial y}-\left[\frac{m+1}{x-y}+(x-y)\varphi(\overline{x-y}^2)\right]\left(\frac{\partial U}{\partial x}-\frac{\partial U}{\partial y}\right)=0, \tag{15}$$

其中$U(x,y)=u(x-y,x+y)$，不难验证在上述自变量的变换下，(14)的里曼函数等于(15)的里曼函数，而(15)的里曼函数，是下问题的解$v_1(x,y;\ x_0,y_0)$：

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 v_1}{\partial x\partial y}+\left(\dfrac{\partial}{\partial x}+\dfrac{\partial}{\partial y}\right)\left\{\dfrac{m+1}{x-y}+(x-y)\varphi(\overline{x-y}^2)v_1\right\}=0,\\ v_1(x_0,y;\ x_0,y_0)=\exp\left\{-\displaystyle\int_{y_0}^{y}\left[\dfrac{m+1}{x_0-y}+(x_0-y)\right.\right.\\ \qquad\qquad\left.\left.\varphi(\overline{x_0-y}^2)\right]dy\right\},\\ v_1(x,y_0;\ x_0,y_0)=\exp\left\{\displaystyle\int_{x_0}^{x}\left[\dfrac{m+1}{x-y_0}+(x-y_0)\right.\right.\\ \qquad\qquad\left.\left.\varphi(\overline{x-y_0}^2)\right]dx\right\}.\end{cases}$$

上面的问题在函数变换

$$v_1(x,y;x_0,y_0)=$$
$$=V(x,y;x_0,y_0)\exp\left\{\int_0^{x-y}\eta\varphi(\eta^2)d\eta+\int_0^{x_0-y_0}\eta\varphi(\eta^2)d\eta\right\}$$

下等价于下面较简单的问题：

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} + \dfrac{m+1}{x-y}\left(\dfrac{\partial V}{\partial x} - \dfrac{\partial V}{\partial y}\right) + V\left(\dfrac{\partial}{\partial x} - \dfrac{\partial}{\partial y}\right)\dfrac{m+1}{x-y} + \\ \qquad\qquad + \Phi(x, y)V = 0, \\ V(x_0, y;\ x_0, y_0) = \left(\dfrac{x_0 - y}{x_0 - y_0}\right)^{m+1}, \\ V(x, y_0;\ x_0, y_0) = \left(\dfrac{x - y_0}{x_0 - y_0}\right)^{m+1}, \end{cases}$$

其中

$$\Phi(x, y) = -\left\{2(m+1)\varphi(\overline{x-y}^2) + \frac{\partial}{\partial x}\left[(x-y)\varphi(\overline{x-y}^2) + (x-y)^2\varphi(\overline{x-y}^2)\right]\right\}.$$

求这个问题的解的方法通常是把问题化为等价的积分微分方程，然后用比卡逐次逼近法。但是，解上问题有实际上的困难，由于积分号下有未知函数的微商，因而逐次逼近的计算相当复杂，我们不这样做，而是先把方程中$\Phi(x, y)V$这一项移到等式的另一边，然后由里曼方法得积分方程：

$$V(x, y;\ x_0, y_0) = \bar{V}(x_0, y_0;\ x, y) + \\ + \int_{x}^{x_0}\int_{y_0}^{y} \bar{V}(x', y';\ x, y)\Phi(x', y')V(x', y';\ x_0, y_0)\,dx'dy', \tag{16}$$

其中

$$\bar{V}(x, y;\ x_0, y_0) = \\ = \frac{(x_0 - y_0)^{2(m+1)}}{(x_0 - y)^{m+1}(x - y_0)^{m+1}} F(m+1, m+1, 1;\ \sigma),$$

这里F为超几何函数，$\sigma = \dfrac{(x - x_0)(y_0 - y)}{(x_0 - y)(x - y_0)}$.

从上述积分方程着手，我们要证明

$$V(x,y;\ x_0,y_0)=\sum_{i=1}^{\infty}V_i\ , \tag{17}$$

的收敛性，其中

$$V_0=\overline{V}(x_0,y_0;\ x,y),$$

$$V_n=\int_x^{x_0}\int_{y_0}^{y}\overline{V}(x',y';\ x,y)\Phi(x',y')V_{n-1}(x',y';\ x_0,y_0)dx'dy',$$

$$n=1,\ 2,\ \cdots$$

并由此而得 V 在奇线 $x-y=0$ 附近的性质。换言之，我们要证明：$\sum_{i=0}^{\infty}V_i$ 在区间 $\{(x,y):\ x\leqslant x_0,\ y\geqslant y_0,\ x-y=\varepsilon\}$ 内一致收敛。因而证明了此和函数是积分方程的解；并具形式

$$V=(x-y)F_1(x,y;\ x_0,y_0),$$

这里 F_1 是正规函数。

事实上，

$$|\overline{V}|=\frac{(x-y)^{2(m+1)}}{(x-y_0)^{m+1}(x_0-y)^{m+1}}\cdot\left[\frac{(x_0-y_0)(x-y)}{(x_0-y)(x-y_0)}\right]^{-2m-1}\cdot$$

$$\cdot F(-m,\ -m,\ 1;\ \sigma)$$

$$\leqslant A(x-y)(x-y_0)^m(x_0-y)^m(x_0-y_0)^{-2m-1},$$

其中 A 是与 x，y，x_0，y_0 无关的正数，例如可取 $A=F(-m,-m,1;1)$. 因为在所考虑的区域上 $|\sigma|<1$，并且 $F(-m,-m,1;\ \sigma)$ 是正系数多项式，因此上面的估计是对的。又

$$|V_1|\leqslant\frac{A^2M(x-y)}{(x_0-y_0)^{2m+1}}\int_{y_0}^{y}\int_x^{x_0}$$

$$\frac{(x'-y)^m(x-y')(x'-y_0)^m(x_0-y')^m}{(x'-y')^{2m}}dx'dy'\leqslant$$

$$\leqslant\frac{A^2M(x-y)}{(x_0-y_0)^{2m+1}}\int_{y_0}^{y}\int_x^{x_0}(x'-y_0)^m(x_0-y')^m dx'dy'\leqslant$$

$$\leqslant \frac{A^2 M(x-y)(x-y_0)^{m+1}(x_0-y)^{m+1}}{(m+1)^2(x_0-y_0)^{2m+1}},$$

其中M是$|\Phi|$的上界。注意，在第二个不等式运算中，我们已借助了不等式$x_0 \geqslant x' \geqslant x > y \geqslant y' \geqslant y_0$，不难用数学归纳法证明

$$|V_n| \leqslant \frac{(m!)^2 A^{n+1} M^n (x-y_0)^{m+n}(x_0-y)^{m+n}(x-y)}{[(m+1)!]^2(x_0-y_0)^{2m+1}},$$

$$n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots.$$

因此，也就证明了(16)的解采取(17)的形式，并且由我们的估计可知(17)的形式实际上对于任一点(x_0, y_0)，$x_0 > y_0$都成立。不难见对于$x_0 < y_0$的情况，(17)同样成立。

因之得(15)的里曼函数，从而得(14)的里曼函数

$$v_1(r, s;\ r_0, s_0) = r f_1(r, s;\ r_0, s_0),$$

其中f_1为正规函数。

同样，若方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial s^2} + \left[\frac{2(m_1+1)}{s} + 2s\varphi_1(s^2)\right]\frac{\partial u}{\partial s} = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} \qquad (18)$$

的里曼函数为$v_2(r, s;\ r_0, s_0)$，则必

$$v_2(r, s;\ r_0, s_0) = s f_2(r, s;\ r_0, s_0),$$

其中f_2为正规函数。

现在考虑(13)的里曼函数。

方程(13)，(14)和(18)顺次用函数变换

$$U = r^{-(m+1)} s^{-(m_1+1)} e^{-\int^r \varphi(\eta^2)\eta d\eta - \int^s \varphi_1(\eta^2)\eta d\eta} u,$$

$$U = r^{-(m+1)} e^{-\int^r \varphi(\eta^2)\eta d\eta} u, \qquad (*)$$

和

$$U = s^{-(m_1+1)} e^{-\int^s \varphi_1(\eta^2)\eta d\eta} u,$$

则变为方程

$$\frac{\partial^2 U}{\partial r^2}-\frac{\partial^2 U}{\partial s^2}+[\rho_1(r)+\rho_2(s)]U=0, \tag{19}$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial r^2}-\frac{\partial^2 U}{\partial s^2}+\rho_1(r)U=0 \tag{20}$$

和

$$\frac{\partial^2 U}{\partial r^2}-\frac{\partial^2 U}{\partial s^2}+\rho_2(s)U=0, \tag{21}$$

其中

$$\rho_1(r)=-$$
$$-\frac{2m(m+1)}{r^2}-(2m+r)\varphi(r^2)-r^2\varphi(r^2)-2\varphi'(r^2)r^2,$$

$$\rho_2(s)=-$$
$$-\frac{2m_1(m_1+1)}{s^2}-(2m_1+s)\varphi_1(s^2)-s^2\varphi_1(s^2)-2\varphi_1'(s^2)s^2.$$

用阿列夫斯基的结果(Олевский, М. Н. ДАН, СССР. 87, 337—340(1952)), 立即得(19)的里曼函数

$$\bar{v}(r,s;\ r_0,s_0)=\bar{v}_1(r,s;\ r_0,s_0)+$$
$$+\int_{s-s_0}^{r-r_0}\bar{v}_1(r,\xi;\ r_0,0)\frac{\partial\bar{v}_2(\xi,s;\ 0,s_0)}{\partial\xi}d\xi,$$

其中 $\bar{v}_1,\bar{v}_2$ 为方程(20), (21)的里曼函数。并且不难证明, 相应于(＊)的三个函数变换有

$$\bar{v}_1=c_1r^{m-1}e^{\int^r\varphi(\eta^2)\eta\,d\eta}v_1,$$
$$\bar{v}_2=c_2s^{m_1+1}e^{\int^s\varphi_1(\eta^2)\eta\,d\varphi}v_2,$$

以及对方程(13)的里曼函数 v 有

$$\bar{v} = c r^{m+1} s^{m+1} e^{\int^r \varphi(\eta^2)\eta d\eta + \int^s \varphi_1(\eta^2)\eta d\eta} v,$$

其中 c_1, c_2, c 为常数。

由此即可断定(13)的里曼函数必采取如下的形式

$$v(r, s;\ r_0, s_0) = rs F(r, s;\ r_0, s_0),$$

这里 F 为正规函数。

通过上两节的讨论，为要把阿斯盖生中量定理推广的研究引向深入，可以进一步考虑(13)或(12)相应的奇型柯西问题并考虑在奇线 $r=s$ 上应当满足的条件，从而得到相应的定理的推广，这些都还有待进一步深入。

§ 3 列维的结果

考虑六变元超双曲型方程

$$\Box u \equiv \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} - \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial^2 u}{\partial y_i^2} = f(x, y),$$

这里 $x=(x_1, x_2, x_3)$，$y=(y_1, y_2, y_3)$。

设 a 是一正数，考虑曲面(C)：

$$r + s = a,$$

其中

$$r^2 = \sum_{i=1}^{3} x_i^2,\quad s^2 = \sum_{i=1}^{3} y_i^2.$$

显然(C)是超双曲型方程的特征曲面，而且通过 $r=0, s=a$ 与 $r=a$, $s=0$。

我们有恒等式

$$rs\Box u \equiv \frac{\partial^2}{\partial r^2}(rsu) - \frac{\partial^2}{\partial s^2}(rsu) + \frac{s}{r}\wedge_1 u - \frac{r}{s}\wedge_2 u, \tag{22}$$

这里$\wedge_1 u$是仅包括对于球r＝常数，(y_i)固定时微商的线性微分表示式。同样$\wedge_2 u$是对于球s＝常数，(x_i)固定时微商的线性微分表示式，特别是$\wedge_1 u$在r＝常数，y固定上的积分为零，类似地作$\wedge_2 u$在s＝常数，x固定上的积分，亦为零。

这些事实，由恒等式

$$r\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}=\left(\sum\frac{x_i}{r}\frac{\partial}{\partial x_i}\right)^2(ru)+$$

$$+\frac{1}{2}r\sum_{i\neq j}\left(\frac{x_i}{r}\frac{\partial}{\partial x_j}-\frac{x_j}{r}\frac{\partial}{\partial x_i}\right)^2 u$$

都可得到。

考虑沿(C)的五重积分

$$\int dt\iint d\omega_1\iint d\omega_2 rs\Box u,$$

其中t是在(C)：$r=t$，$s=a-t$上的长度参数，$d\omega_1$，$d\omega_2$分别是二维球r＝常数，y固定与s＝常数，x固定的立体角元素，显然

$$\frac{d}{dt}=\frac{\partial}{\partial r}-\frac{\partial}{\partial s},$$

并由恒等式(22)得

$$\int_0^a dt\iint d\omega_1\iint d\omega_2 rsf(x,\ y)=$$

$$=\iint d\omega_1\iint d\omega_2\left(\frac{\partial}{\partial r}+\frac{\partial}{\partial s}\right)(rsu)\Big|_{r=0,s=a}^{r=a,s=0}=$$

$$=4\pi a\left(\iint d\omega_1 u(r=a,s=0)-\iint d\omega_2 u(r=0,s=a)\right).$$

这就是六变元非齐次超双曲型方程的阿斯盖生定理。

本节推广的阿斯盖生定理，所应用的方法是利用微分恒

等式沿特征曲面的积分而得到的。§ 1 中阿斯盖生定理的推广，是利用了基本公式，在基本公式中联系于伴随算子的函数取为二拉普拉斯函数的积分而得到。问题是可否利用基本公式、基本解来推广阿斯盖生定理。这将在下节中阐明。

§ 4　一般非齐次超双曲型方程的中量定理

1. 非齐次方程的解的中量

考虑方程

$$F(u)\equiv\sum_{i=1}^{m}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial y_i^2}\right)=f(x,\ y),\quad m\geqslant 2. \qquad (23)$$

这方程的伴随方程是

$$G(v)\equiv\sum_{i=1}^{m}\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x_i^2}-\frac{\partial^2 v}{\partial y_i^2}\right)=0,$$

则有基本公式

$$\mathrm{Pf}\iint_V\cdots\int[vF(u)-uG(v)]dV=$$

$$=-\mathrm{Pf}\int_S\cdots\int\left[\sum_{i=1}^{m}\left(v\frac{\partial u}{\partial x_i}-u\frac{\partial v}{\partial x_i}\right)\pi_i-\right.$$

$$\left.-\sum_{i=1}^{m}\left(v\frac{\partial u}{\partial y_i}-u\frac{\partial v}{\partial y_i}\right)\rho_i\right]dS.$$

在基本公式中，取 V 为 R_{2m} 中的有界闭域：

$$\sum_{i=1}^{m}(x_i-x_i^0)^2\leqslant r^2,\qquad \sum_{i=1}^{m}(y_i-y_i^0)^2\leqslant s^2,$$

u 为 $F(u)=0$ 在闭域上的正规解，v 为基本解 Γ^{1-m}，而 Γ 为动定两点测地距离的平方

$$\Gamma=\sum_{i=1}^{m}(x_i-x_i^0)^2-\sum_{i=1}^{m}(y_i-y_i^0)^2.$$

仿第二章§1的讨论，可引出超双曲型方程(23)的解在球面

$$\sum_{i=1}^{m}(x_i-x_i^0)^2=r^2,\quad \sum_{i=1}^{m}(y_i-y_i^0)^2=s^2$$

上的中量：

$$M(r,\ s)=\int\cdots\int_{\Omega_\alpha}\int\cdots\int_{\Omega_\beta}u(x_i^0+\alpha_i r;\ y_i^0+\beta_i s)d\Omega_\alpha d\Omega_\beta.$$

$M(r,\ s)$应满足

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 M}{\partial r^2}-\dfrac{\partial^2 M}{\partial s^2}+\dfrac{m-1}{r}\dfrac{\partial M}{\partial r}-\dfrac{m-1}{s}\dfrac{\partial M}{\partial s}=\\ \qquad\qquad =f_1(r,s),\qquad (r>s),\\ M(r,0)=\bar{f}(r),\\ \dfrac{\partial M}{\partial s}(r,\ 0)=0,\quad (r\geqslant 0)\end{cases}\tag{24}$$

与

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 M}{\partial r^2}-\dfrac{\partial^2 M}{\partial s^2}+\dfrac{m-1}{r}\dfrac{\partial M}{\partial r}-\dfrac{m-1}{s}\dfrac{\partial M}{\partial s}=\\ \qquad\qquad =f_1(r,\ s),\qquad (r<s),\\ M(0,s)=\bar{g}(s),\\ \dfrac{\partial M}{\partial r}(0,s)=0.\quad (s\geqslant 0)\end{cases}\tag{25}$$

2. 奇型柯西问题的解

考虑问题(24)。首先，我们注意到，(24)的解可表示为如下两个定解问题的解之和：

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 M}{\partial r^2}-\dfrac{\partial^2 M}{\partial s^2}+\dfrac{m-1}{r}\dfrac{\partial M}{\partial r}-\dfrac{m-1}{s}\dfrac{\partial M}{\partial s}=0,\\ M(r,0)=\bar{f}(r),\\ \dfrac{\partial M}{\partial s}(r,0)=0\end{cases}\tag{24_1}$$

与

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 M}{\partial r^2}-\dfrac{\partial^2 M}{\partial s^2}+\dfrac{m-1}{r}\dfrac{\partial M}{\partial r}-\dfrac{m-1}{s}\dfrac{\partial M}{\partial s}= \\ \qquad =f_1(r,s), \\ M(r,0)=0, \\ \dfrac{\partial M}{\partial s}(r,\ 0)=0. \end{cases} \tag{24_2}$$

(24_1)的解已知为

$$M_1(r,s)=\frac{\Gamma(m-1)}{\Gamma^2\left(\frac{m-1}{2}\right)}\int_0^1 \bar{f}(\sqrt{(r-s)^2+4rs\lambda})\,\lambda^{\frac{m-3}{2}}$$

$$(1-\lambda)^{\frac{m-3}{2}}d\lambda,\qquad (r\geqslant s),$$

(24_2)的解，由里曼方法(仿第二章§1)可以求得

$M_2(r,s)=$

$$=-\frac{1}{2}\iint_{D'}\frac{\xi\eta\left[\left(\frac{r+s}{2}\right)^2-\left(\frac{\xi-\eta}{2}\right)^2\right]^{\frac{m-3}{2}}\left[\left(\frac{\xi+\eta}{2}\right)^2-\left(\frac{r-s}{2}\right)^2\right]^{\frac{m-3}{2}}}{(rs)^{m-2}}\times$$

$$\times F\left(\frac{3-m}{2},\ \frac{3-m}{2},\ 1;\ \sigma\right)f_1(\xi,\eta)dD',$$

其中F为超几何函数，

$$\sigma=\frac{[(r+s)^2-(\xi+\eta)^2][(\xi-\eta)^2-(r-s)^2]}{[(\xi+\eta)^2-(r-s)^2][(r+s)^2-(\xi-\eta)^2]},$$

D'为由$\eta=0$，$\xi+\eta=r+s$，$\xi-\eta=r-s$围成的域。

因此，(24)的解为

$M(r,s)=M_1(r,s)+M_2(r,s)=$

$$=\frac{\Gamma(m-1)}{\Gamma^2\left(\frac{m-1}{2}\right)}\int_0^1 \bar{f}(\sqrt{(r-s)^2+4rs\lambda})\lambda^{\frac{m-3}{2}}(1-\lambda)^{\frac{m-3}{2}}d\lambda-$$

$$-\frac{1}{2^{m-2}}\iint\limits_{D'}\frac{\xi\eta[(r+s)^2-(\xi-\eta)^2]^{\frac{m-3}{2}}[(\xi+\eta)^2-(r-s)]^{\frac{m-3}{2}}}{(rs)^{m-2}}\times$$

$$\times F(\sigma)f_1(\xi,\eta)dD',\qquad (r>s\geqslant 0),\qquad (26)$$

同样，可以求得(25)的解为

$$M(r,s)=$$

$$=\frac{\Gamma(m-1)}{\Gamma^2\left(\frac{m-1}{2}\right)}\int_0^1\bar{g}(\sqrt{(r-s)^2+4rs\lambda})\lambda^{\frac{m-3}{2}}(1-\lambda)^{\frac{m-3}{2}}d\lambda+$$

$$+\frac{1}{2^{m-2}}\iint\limits_{D''}\frac{\xi\eta[(r+s)^2-(\xi-\eta)^2]^{\frac{m-3}{2}}[(\xi+\eta)^2-(r-s)^2]^{\frac{m-3}{2}}}{(rs)^{m-2}}\times$$

$$\times F(\sigma)f_1(\xi,\eta)dD'',\qquad (0\leqslant r<s),\qquad (27)$$

其中D''为由$\xi=0$，$\xi+\eta=r+s$，$\xi-\eta=r-s$所围成的闭域。

3．中量公式

当$r=s$时，欲(26)及(27)代表同一个函数，则有

$$\int_0^1[\bar{f}(2r\sqrt{\lambda})-\bar{g}(2r\sqrt{\lambda})]\lambda^{\frac{m-3}{2}}(1-\lambda)^{\frac{m-3}{2}}d\lambda=P(r),$$

其中

$$P(r)=\frac{1}{2^{m-2}}\frac{\Gamma^2\left(\frac{m-1}{2}\right)}{\Gamma(m-1)}\iint\limits_{D_0}\frac{\xi\eta[4r^2-(\xi-\eta)^2]^{\frac{m-3}{2}}(\xi+\eta)^{m-3}}{r^{2(m-2)}}\times$$

$$\times F\left(\frac{3-m}{2},\frac{3-m}{2},1;\ \frac{[4r^2-(\xi+\eta)^2](\xi-\eta)^2}{(\xi+\eta)^2[4r^2-(\xi-\eta)^2]}\right)$$

$$f_1(\xi,\eta)dD_0,$$

D_0为$\xi=0,\eta=0,\xi+\eta=2r$围成的闭域。

令$2r\sqrt{\lambda}=\sqrt{t}$，$2r=\sqrt{\rho}$，则有

$$\int_0^\rho [\bar{f}(\sqrt{t})-\bar{g}(\sqrt{t})]t^{\frac{m-3}{2}}(\rho-t)^{\frac{m-3}{2}}dt=$$
$$=\rho^{m-2}P\left(\frac{\sqrt{\rho}}{2}\right). \tag{28}$$

当m为奇数时，对(28)两端微分$\frac{m-1}{2}$次得

$$\bar{f}(\sqrt{\rho})-\bar{g}(\sqrt{\rho})=$$
$$=\frac{1}{\left(\frac{m-3}{2}\right)!\rho^{\frac{m-3}{2}}}\frac{\partial^{\frac{m-1}{2}}}{\partial\rho^{\frac{m-1}{2}}}\left[\rho^{m-2}P\left(\frac{\sqrt{\rho}}{2}\right)\right]. \tag{29}$$

当m为偶数时，对(28)两端微分$\frac{m}{2}-1$次得

$$\int_0^\rho \frac{[\bar{f}(\sqrt{t})-\bar{g}(\sqrt{t})]t^{\frac{m-3}{2}}}{\sqrt{\rho-t}}dt=$$
$$=\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m-3}{2}\right)}\frac{\partial^{\frac{m}{2}-1}}{\partial\rho^{\frac{m}{2}-1}}\left[\rho^{m-2}P\left(\frac{\sqrt{\rho}}{2}\right)\right],$$

这是亚倍尔积分方程，它的解是

$$\bar{f}(\sqrt{\rho})-\bar{g}(\sqrt{\rho})=\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\pi\Gamma\left(\frac{m-3}{2}\right)}\frac{d}{d\rho}\int_0^\rho\frac{\partial^{\frac{m}{2}-1}}{\partial t^{\frac{m}{2}-1}}$$
$$\left[t^{m-2}P\left(\frac{\sqrt{t}}{2}\right)\right]\cdot\frac{dt}{\sqrt{\rho-t}}. \tag{30}$$

于是得到非齐次方程的中量定理:

定理 设 R_{2m} 是 $2m$ 维空间内一闭单连通区域，u 是非齐次超双曲型方程(23)在 R_{2m} 的正规解，(x_i^0, y_i^0) 是 R_{2m} 内任一点，t_0 是使域

$$\sqrt{\sum_1^m (x_i - x_i^0)^2} + \sqrt{\sum_1^m (y_i - y_i^0)^2} \leqslant t_0$$

整个在 R_{2m} 内的正数，则当 r，s 是适合不等式

$$r + s \leqslant t_0$$

的任一对正数时，u 在

$$\sum_{i=1}^m (x_i - x_i^0)^2 = r^2, \qquad \sum_{i=1}^m (y_i - y_i^0)^2 = s^2,$$

上的中量为(26)与(27)。当 m 为奇数或偶数时，$\bar{f}$ 与 $\bar{g}$ 分别由(29)或(30)相联系。

(29)或(30)分别称为当 m 为奇数或偶数时，超双曲型方程(23)的解 u 的中量公式。

当 $m=3$ 时即得列维的结果。事实上，由(29)有

$$\bar{f}(\sqrt{\rho}) - \bar{g}(\sqrt{\rho}) = \frac{1}{\sqrt{\rho}} \int_0^{\sqrt{\rho}} \xi(\sqrt{\rho} - \xi) f_1(\xi, \sqrt{\rho} - \xi) d\xi,$$

即

$$4\pi a\left(\iint_{\Omega_\alpha} u(x_i^0 + \alpha_i a, y_i^0) d\Omega_\alpha - \iint_{\Omega_\beta} u(x_i^0, y_i^0 + \beta_i a) d\Omega_\beta\right) =$$

$$= \int_0^a d\xi \iint_{\Omega_\alpha} \iint_{\Omega_\beta} \xi(a - \xi) f(x_i^0 + \alpha_i \xi, y_i^0 + \beta_i (a - \xi)) d\Omega_\alpha d\Omega_\beta .$$

注　对非齐次超双典型方程，亦有相应的体积中量公式。

4．中量公式的应用

考虑非齐次波动方程的特征问题

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial x_3^2}-\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}=-f(x_1,x_2,x_3,t), \\ \qquad\left(\sqrt{\sum_1^3 x_i^2}<t\right), \\ u(x_1,\ x_2,\ x_3,\ \sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2})=0. \end{cases}$$

设 $u(x_1,x_2,x_3,t)$ 是问题的解，$(\bar{x}_1,\bar{x}_2,\ \bar{x}_3,\bar{t})$ 是特征锥 $t=\sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2}$ 内任一点，即 $\sqrt{\sum_1^3 \bar{x}_i^2}<\bar{t}$，则当 $\tau\leqslant\bar{t}-\sqrt{\sum_1^3\bar{x}_i^2}$ 时，由中量公式(29)可得

$$4\pi\tau\left[\iint_{\Omega_\alpha} u(\bar{x}_i+\alpha_i\tau,\ \bar{t})d\Omega_\alpha-\iint_{\Omega_\alpha}u(\bar{x}_i,\bar{t}+\alpha_1\tau)d\Omega_\alpha\right]=$$

$$=-\int_0^\tau d\xi\iint_{\Omega_\alpha}\iint_{\Omega_\beta}\xi(\tau-\xi)f(\bar{x}_i+\alpha_i\xi,\bar{t}+\beta_1(\tau-\xi))d\Omega_\alpha d\Omega_\beta,$$

在上式中令 $\bar{x}_i=0$，，$i=1,2,3,\tau=\bar{t}$，则得

$$4\pi\bar{t}\iint_{\Omega_\alpha}u(0,\bar{t}+\alpha_1\bar{t})d\Omega_\alpha=$$

$$=\int_0^{\bar{t}} d\xi\iint_{\Omega_\alpha}\iint_{\Omega_\beta}\xi(\bar{t}-\xi)f(\alpha_i\xi,\bar{t}+\beta_1(\bar{t}-\xi))d\Omega_\alpha d\Omega_\beta,$$

上式可以化为

$$4\pi\int_0^{2\bar{t}}u(0,r)dr=\int_0^{\bar{t}} dr\int_0^r\xi d\xi\iint_{\Omega_\alpha}f(\alpha_i\xi,r)d\Omega_\alpha+$$

$$+\int_0^{\bar{t}} dr\int_0^{\bar{t}-r}\xi d\xi\iint_{\Omega_\alpha}f(\alpha_i\xi,\bar{t}+r)d\Omega_\alpha,$$

上式两端对 $\bar{t}$ 求导，并注意到

$$\int_0^{\bar{t}} dr\int_0^{\bar{t}-r}\xi d\xi\iint_{\Omega_\alpha}f(\alpha_i\xi,\bar{t}+r)d\Omega_\alpha=$$

$$=\int_{t}^{2t} dr\int_{0}^{2t-r}\xi d\xi\iint_{\Omega_\alpha} f(\alpha_i\xi, r)\,d\Omega_\alpha,$$

我们得到

$$4\pi u(0,\bar{t})=\int_{0}^{\frac{\bar{t}}{2}}\xi\, d\xi\iint_{\Omega_\alpha} f(\alpha_i\xi,\ \bar{t}-\xi)\,d\Omega_\alpha.$$

考虑特征锥 $x_1^2+x_2^2+x_3^2=t^2$ 内任一点(x_{oi}, t_o)，我们知道，有无穷多个罗伦兹变换保持方程或特征锥面不变，而且将点$(x_{oi},\ t_o)$变为点$(0,\ t_m)$，任意取定这种罗伦兹变换中的一个，我们的解 u 就将变为一个新的函数 $U(x_1',x_2',x_3',t')$，函数 $f(x_1,x_2,x_3,t)$变为 $f_1(x_1',x_2',x_3',t')$，而有

$$U(x_i',\ \sqrt{\sum_j x_j'^2})=0,$$

$$f_1(x_1',x_2',x_3',t')=f(\sum_j a_{ij}x_j'+b_it'),$$

这里

$$x_i=\sum_j a_{ij}x_j'+b_it',$$

$$t=\sum_j a_jx_j'+bt'$$

是我们取定的罗伦兹变换，于是，我们有

$$u(x_{01},x_{02},x_{03},t_0)=U(0,0,0,\sqrt{t_0^2-\sum x_{0i}^2})=$$

$$=\frac{1}{4\pi}\int_0^{\frac{t_1}{2}}\xi\, d\xi\iint_{\Omega_\alpha} f\,(\sum_j a_{ij}\alpha_j\xi+b_i(t_1-\xi))\,d\Omega_\alpha,$$

其中

$$t_1=\sqrt{t_0^2-\sum_i x_{0i}^2}\ .$$

用推广了的中量公式，还可以讨论其它非齐次方程的定解问题，如非齐次波动方程的柯西问题，非齐次超双曲型方

程的特征问题等。

作为推广了的中量公式的另一应用，考虑以下非齐次方程的解的拓展性质，这种性质对讨论某些非齐次方程定解问题的不适定性是重要的。

5． 解的拓展性质

为方便计，将中量公式(29)，(30)统一写为

$$M(r,0)-M(0,r)=h(r), \tag{31}$$

这里 $h(r)$ 是当 m 是奇数或偶数时，将公式(29)，(30)的右端项中的 ρ 换为 r^2 的结果。

设 $u(x_1,\cdots,x_m,t,y_1,\cdots,y_n)$ 是超双曲型方程

$$\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2 u}{\partial y_i^2}=f(x,t,y)$$

$$(m1\geqslant,1n>)$$

在域 R_{m+n+1} 内的正规解，设域

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{m}(x_i-x_i^0)^2+t^2}+\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(y_i-y_i^0)^2}\leqslant R_0 \tag{32}$$

整个包含在 R_{m+n+1} 内，则有

定理 若 $u(x_1,\cdots,x_m,0,y_1,\cdots,y_n)$ 在域

$$\sum_{i=1}^{m}(x_i-x_i^0)^2\leqslant\varepsilon^2,\quad \sum_{i=1}^{m}(y_i-y_i^0)^2\leqslant R_0^2 \tag{33}$$

是定义的，则

$$u(x_1,\cdots,x_m,t,y_1,\cdots,y_m)+$$
$$+u(x_1,\cdots,x_m,-t,y_1,\cdots,y_n)$$

便在域(32)上是定义的，即：$u(x,0,y)$ 在(33)的值就足以唯一确定它在(32)的值。

证：由中量公式(31)当 $m+1\geqslant n$ 时

$$\int\cdots\int_{\sum_{i=1}^{m}\xi_i^2+t^2=r^2} u(x_1+\xi_1,\cdots,x_m+\xi_m,t,y_1,\cdots,y_n)d\xi_1\cdots d\xi_m dt-$$

$$-\int\cdots\int_{\sum_{i=1}^{m}{}'\xi_i^2+t^2=r^2} u(x_1,\cdots,x_m,0,y_1+\xi_1,\cdots,y_n+\xi_n)d\xi_1\cdots d\xi_n dt$$

$$=\frac{1}{\omega_{m+1}}h(r)r^{m-1},\qquad \left(0\leqslant r\leqslant R_0-\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(y_i-y_i^0)^2}\right),$$

由于上式右端及左端第二项为已知，左端第一项也就已知了，于是也就知道

$$u(x_1,\cdots,x_m,t,y_1,\cdots,y_n)-u(x_1,\cdots,x_m,-t,y_1,\cdots,y_n)$$

在(32)上的值。

当$m+1<n$时，由中量公式(31)有

$$\int\cdots\int_{\sum_{i=1}^{n}\xi_i^2=r^2} u(x_1+\xi_1,\cdots,x_m+\xi_m,\xi_{m+1},y_1,\cdots,y_n)d\xi_1\cdots d\xi_n-$$

$$-\int\cdots\int_{\sum_{i=1}^{n}{}'\xi_i^2=r^2} u(x_1,\cdots,x_m,0,y_1+\xi_1,\cdots,y_n+\xi_n)d\xi_1\cdots d\xi_n=$$

$$=\frac{1}{\omega_n}h(r)r^{n-2},\qquad \left(0\leqslant r\leqslant R_0-\sqrt{\sum_{i=1}^{n}{}'(y_i-y_i^0)^2}\right),$$

上式可写为

$$\int\cdots\int_{\sum_{i=1}^{m+1}\xi_i^2\leqslant r^2} u(x_1+\xi_1,\cdots,x_m+\xi_m,\xi_{m+1},y_1,\cdots,y_n)r\,\omega_{n-m-2}\cdot$$

$$\cdot B\left(\frac{n-m-2}{2},\ \frac{1}{2}\right)\cdot\left(r^2-\sum_{i=1}^{m+1}{}'\xi_i^2\right)^{\frac{n-m-3}{2}}\cdot$$

$$\cdot d\xi_1\cdots d\xi_{m+1}=\phi(x,y,r),\qquad (34)$$

这里

$$\phi(x,y,r)=\underset{\sum\limits_{i=1}^{n}\xi_i^2=r^2}{\int\cdots\int}u(x_1,\cdots,x_n,0,y_1+\xi_1,\cdots,y_n+\xi_n)d\xi_1\cdots$$

$$\cdots d\xi_n+\frac{1}{\omega_n}h(r)r^{n-2},$$

(34)又可写成

$$r\int_0^r J(\rho)(r^2-\rho^2)^{\frac{n-m-3}{2}}d\rho=$$

$$=\frac{1}{\omega_{n-m-2}B\left(\frac{n-m-2}{2},\ \frac{1}{2}\right)}\phi(x,y,r),$$

这里

$$J(\rho)=\underset{\sum\limits_{i=1}^{n+1}\xi_i^2=\rho^2}{\int\cdots\int}u(x_1+\xi_1,\cdots,x_m+\xi_m,\xi_{m+1},y_1,\cdots$$

$$\cdots,\ y_n)d\xi_1\cdots\cdots d\xi_{m+1},$$

令 $\rho^2=\rho_1$，$r^2=r_1$，则有

$$\int_0^r J(\rho_1)\frac{(r_1-\rho_1)^{\frac{n-m-3}{2}}}{\sqrt{\rho_1}}d\rho_1=$$

$$=\frac{1}{2\omega_{n-m-2}B\left(\frac{n-m-2}{2},\ \frac{1}{2}\right)}\ \frac{\phi(x,y,\sqrt{r_1})}{\sqrt{r_1}},$$

由于 $u(x_1,\cdots,x_m,0,y_1,\cdots,y_n)$在(33)内定义，故上式的右端已知，而上式又可化为亚倍尔积分方程，因此，我们就可知 $J(r)$在

$$\sum_{i=1}^{m}(x_i-x_i^0)^2\leqslant\varepsilon^2,\ 0\leqslant r\leqslant R_0-\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(y_i-y_i^0)^2}$$

上的值，于是

$$u(x_1,\cdots,x_m,t,y_1,\cdots,y_n)+u(x_1,\cdots,x_m,-t,y_1,\cdots,y_n)$$

在(32)上的值就已知了。

由上定理，不难有

系 若 $u(x_1,\cdots,x_m,0,y_1,\cdots,y_n)$在域

$$\sum_{i=1}^{m}(x_i-x_i^0)^2\leqslant\varepsilon^2,\quad \sum_{i=1}^{n}(y_i-y_i^0)^2\leqslant R_0^2$$

上定义，则它必在

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{m}(x_i-x_i^0)^2}+\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(y_i-y_i^0)^2}\leqslant R_0$$

上定义。

用上述拓展性质，仿第二章可讨论非齐次方程的一些不适定问题，这里不再赘述。

§5 一类高阶方程的解的中量

中量定理的重要性在于：不仅可用来讨论某些方程，某些定解问题的适定性，而且可用来建立超双曲型方程的解的奇特的拓展性，从而讨论某些方程的不适定问题。

自然，对多维高阶方程建立中量性质是重要的。

考虑多维高阶方程

$$F(u)\equiv(\Delta_1^2-\Delta_2^2)u=0 \tag{35}$$

这里

$$\Delta_1\equiv\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2}{\partial y_1^2},\qquad \Delta_2\equiv\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}+\frac{\partial^2}{\partial y_2^2}。$$

1. 基本解的构造

方程(35)的特征四次型为

$$\mathscr{A}(\pi_1,\pi_2,\pi_3,\pi_4;\ x_1,y_1,x_2,y_2)=$$
$$=\pi_1^4+2\pi_1^2\pi_2^2+\pi_2^4-\pi_3^4-2\pi_3^2\pi_4^2-\pi_4^2,$$

其中

$$\pi_1=\frac{\partial\Gamma}{\partial x_1},\ \pi_2=\frac{\partial\Gamma}{\partial y_1},\ \pi_3=\frac{\partial\Gamma}{\partial x_2},\ \pi_4=\frac{\partial\Gamma}{\partial y_2},$$

Γ是方程(35)的特征曲面$\Gamma=0$中的函数，在$\Gamma=0$上满足特征方程

$$\mathscr{A}\left(\frac{\partial\Gamma}{\partial x_1},\ \frac{\partial\Gamma}{\partial y_1},\ \frac{\partial\Gamma}{\partial x_2},\ \frac{\partial\Gamma}{\partial y_2};\ x_1,y_1,x_2,y_2\right)=$$
$$=\left(\frac{\partial\Gamma}{\partial x_1}\right)^4+2\left(\frac{\partial\Gamma}{\partial x_1}\right)^2\left(\frac{\partial\Gamma}{\partial y_1}\right)^2+\left(\frac{\partial\Gamma}{\partial y_1}\right)^4-$$
$$-\left(\frac{\partial\Gamma}{\partial x_2}\right)^4-2\left(\frac{\partial\Gamma}{\partial x_2}\right)^2\left(\frac{\partial\Gamma}{\partial y_2}\right)^2-\left(\frac{\partial\Gamma}{\partial y_2}\right)^4=0,\quad(36)$$

这种特征曲面，是过四维空间一定点，方程(36)的特征线形成的积分锥面，这种积分锥面即特征角面。

求特征角面的问题，就变为解下列常微分方程组的定解问题：

$$\begin{cases}\dfrac{dx_1}{\pi_1^3+\pi_1\pi_2^2}=\dfrac{dy_1}{\pi_2\pi_1^2+\pi_2^3}=\dfrac{-dx_2}{\pi_3^3+\pi_3\pi_4^2}=\\[2mm] \qquad=\dfrac{-dy_2}{\pi_4^3+\pi_4\pi_3^2}=ds^3\\[2mm] \dfrac{d\pi_i}{ds}=0,\quad(i=1,2,3,4)\\[2mm] x_1(0)=x_1^0,y_1(0)=y_1^0,x_2(0)=x_2^0,y_2(0)=y_2^0\\ \pi_i(0)=\pi_{oi},\ (i=1,2,3,4)\end{cases}\qquad(37)$$

其中s是自变数，x_i^0,y_i^0，$(i=1,2)$是常数，π_{oi}是满足条件

$$\mathscr{A}(\pi_{01},\pi_{02},\pi_{03},\pi_{04};\ x_1^0,y_1^0,x_2^0,y_2^0)=0$$

的参变数，且天然有

$$d\Gamma_0=\pi_{01}dx_1^0+\pi_{02}dy_1^0+\pi_{03}dx_2^0+\pi_{04}dy_2^0,$$

$$\Gamma(0)=\Gamma_0,$$

不难得到(35)的解是

$$\pi_i=\pi_{0i},\qquad (i=1,2,3,4),$$

$$x_1-x_1^0=(\pi_{01}s)^3+(\pi_{01}s)(\pi_{02}s)^2,$$

$$y_1-y_1^0=(\pi_{01}s)^2(\pi_{02}s)+(\pi_{02}s)^3,$$

$$x_2-x_2^0=(\pi_{03}s)^3+(\pi_{03}s)(\pi_{04}s)^2,$$

$$y_2-y_2^0=(\pi_{03}s)^2(\pi_{04}s)+(\pi_{04}s)^3。$$

为了构造函数Γ，令 $\pi_{01}s=x$，$\pi_{02}s=y$，则

$$\frac{x^3+xy^2}{x^2y+y^3}=\frac{x_1-x_1^0}{y_1-y_1^0}=\frac{x}{y},$$

令

$$\frac{x}{x_1-x_1^0}=\frac{y}{y_1-y_1^0}=\lambda,$$

则

$$x=(x_1-x_1^0)\lambda,\ y=(y_1-y_1^0)\lambda,$$

$$\lambda^3[(x_1-x_1^0)^3+(x_1-x_1^0)(y_1-y_1^0)^2]=x_1-x_1^0,$$

$$\lambda^3=\frac{1}{(x_1-x_1^0)^2+(y_1-y_1^0)^2},$$

$$\lambda=r_1^{-\frac{2}{3}},\ r_1^2=(x_1-x_1^0)^2+(y_1-y_1^0)^2,$$

$$x=\pi_{01}s=(x_1-x_1^0)r_1^{-2/3},$$

$$y=\pi_{02}s=(y_1-y_1^0)r^{-2/3}.$$

由此构造特征角面的函数Γ：

$$\Gamma\equiv\mathscr{A}(s\pi_{01},s\pi_{02},s\pi_{03},s\pi_{04};\ x_1^0,y_1^0,x_2^0,y_2^0)=$$

$$=(\pi_{01}s)^4+2(\pi_{01}s)^2(\pi_{02}s)^2+(\pi_{02}s)^4-$$

$$-(\pi_{03}s)^4-2(\pi_{03}s)^2(\pi_{04}s)^2-(\pi_{04}s)^4=$$

$$=r_1^{4/3}-r_2^{4/3},\qquad r_2^2=(x_2-x_2^0)^2+(y_2-y_2^0)^2.$$

为了把特征角面函数单值化，显然，

$$(r_1^{4/3}-r_2^{4/3})(r_1^{8/3}+r_1^{4/3}r_2^{4/3}+r_2^{8/3})=$$
$$=(r_1^2-r_2^2)(r_1^2+r_2^2),$$

故取特征角面函数

$$\Gamma=r_1^2-r_2^2,$$

则特征角面函数Γ满足下列方程：

$$\left(\frac{\partial\Gamma}{\partial x_1}\right)^4+2\left(\frac{\partial\Gamma}{\partial x_1}\right)^2\left(\frac{\partial\Gamma}{\partial y_1}\right)^2+\left(\frac{\partial\Gamma}{\partial y_1}\right)^4-$$
$$-\left(\frac{\partial\Gamma}{\partial x_2}\right)^4-2\left(\frac{\partial\Gamma}{\partial x_2}\right)^2\left(\frac{\partial\Gamma}{\partial y_2}\right)^2-\left(\frac{\partial\Gamma}{\partial y_2}\right)^4=$$
$$=2^4(r_1^2+r_2^2)\Gamma,$$

$\Gamma=0$ 即为所求的特征角面。

现在我们求(35)呈

$$u=f(\Gamma)$$

形的解，其中$\Gamma=r_1^2-r_2^2$，容易计算

$$\frac{\partial^4 u}{\partial x_i^4}=\left(\frac{\partial\Gamma}{\partial x_i}\right)^4 f^{(4)}(\Gamma)+6\left(\frac{\partial\Gamma}{\partial x_i}\right)^2\frac{\partial^2\Gamma}{\partial x_i^2}f^{(3)}(\Gamma)+$$
$$+\left[4\frac{\partial\Gamma}{\partial x_i}\frac{\partial^3\Gamma}{\partial x_i^3}+3\left(\frac{\partial^2\Gamma}{\partial x_i^2}\right)^2\right]f''(\Gamma)+\frac{\partial^4\Gamma}{\partial x_i^4}f'(\Gamma),$$

$$\frac{\partial^4 u}{\partial x_i^2\partial y_i^2}=\left(\frac{\partial\Gamma}{\partial x_i}\right)^2\left(\frac{\partial\Gamma}{\partial y_i}\right)^2 f^{(4)}(\Gamma)+$$
$$+\left[\frac{\partial\Gamma}{\partial x_i}\frac{\partial\Gamma}{\partial y_i}\frac{\partial^2\Gamma}{\partial x_i\partial y_i}+\left(\frac{\partial\Gamma}{\partial x_i}\right)^2\frac{\partial^2\Gamma}{\partial y_i^2}+\right.$$
$$\left.+\frac{\partial^2\Gamma}{\partial x_i^2}\left(\frac{\partial\Gamma}{\partial y_i}\right)^2\right]f^{(3)}(\Gamma)+\left[2\frac{\partial^3\Gamma}{\partial x_i^2\partial y_i}\frac{\partial\Gamma}{\partial y_i}+\right.$$
$$\left.+2\frac{\partial^3\Gamma}{\partial y_i^2\partial x_i}\frac{\partial\Gamma}{\partial x_i}+2\left(\frac{\partial^2\Gamma}{\partial x_i\partial y_i}\right)^2\frac{\partial^2\Gamma}{\partial x_i^2}\frac{\partial^2\Gamma}{\partial y_i^2}\right]f''(\Gamma),$$

$$\frac{\partial^4 u}{\partial y_i^4}=\left(\frac{\partial \Gamma}{\partial y_i}\right)^4 f^{(4)}(\Gamma)+6\left(\frac{\partial \Gamma}{\partial y_i}\right)^2\frac{\partial^2 \Gamma}{\partial y_i^2}f^{(3)}(\Gamma)+$$
$$+\left[4\frac{\partial \Gamma}{\partial y_i}\frac{\partial^3 \Gamma}{\partial y_i^3}+3\left(\frac{\partial^2 \Gamma}{\partial y_i^2}\right)^2\right]f''(\Gamma)+\frac{\partial^4 \Gamma}{\partial y_i^4}f'(\Gamma),$$
$$(i=1,\ 2)$$

再计算出Γ的各阶微商，把计算出的这些结果代入(35)，则(35)化为

$$\Gamma f^{(4)}(\Gamma)+4f^{(3)}(\Gamma)=0,$$

得

$$f(\Gamma)=\frac{c_1}{\Gamma}+c_2\Gamma^2+c_3\Gamma+c_4.$$

方程(35)呈$u=f(\Gamma)$形式的解，显然具下述特点：它是(35)伴随方程的解，是所考虑空间动定两点的函数，它以过定点的特征面为奇面，而这个特征面又以定点为其锥点。这种特征面，即特征角面。

方程(35)呈$\frac{c_1}{\Gamma}+c_2\Gamma^2+c_3\Gamma+c_4$形的解称为基本解。

2. 基本公式

显然，(35)中的算子F是自伴的，我们有

$$vF(u)-uF(v)=$$
$$=\frac{\partial}{\partial x_1}\left[v\frac{\partial}{\partial x_1}(\Delta_1 u)-u\frac{\partial}{\partial x_1}(\Delta_1 v)+\right.$$
$$\left.+(\Delta_1 v)\frac{\partial u}{\partial x_1}-(\Delta_1 u)\frac{\partial v}{\partial x_1}\right]+$$
$$+\frac{\partial}{\partial y_1}\left[v\frac{\partial}{\partial y_1}(\Delta_1 u)-u\frac{\partial}{\partial y_1}(\Delta_1 v)+\right.$$
$$\left.+(\Delta_1 v)\frac{\partial u}{\partial y_1}-(\Delta_1 u)\frac{\partial v}{\partial y_1}\right]-$$

$$
-\frac{\partial}{\partial x_2}\left[v\frac{\partial}{\partial x_2}(\Delta_2 u)-u\frac{\partial}{\partial x_2}(\Delta_2 v)+\right.
$$

$$
\left.+(\Delta_2 v)\frac{\partial u}{\partial x_2}-(\Delta_2 u)\frac{\partial v}{\partial x_2}\right]-
$$

$$
-\frac{\partial}{\partial y_2}\left[v\frac{\partial}{\partial y_2}(\Delta_2 u)-u\frac{\partial}{\partial y_2}(\Delta_2 v)+\right.
$$

$$
\left.+(\Delta_2 v)\frac{\partial u}{\partial y_2}-(\Delta_2 u)\frac{\partial v}{\partial y_2}\right],
$$

因之，有基本公式

$$
\iiiint_V [vF(u)-uF(v)]\,dV=
$$

$$
=-\iiint_S\left\{\left[v\frac{\partial}{\partial x_1}(\Delta_1 u)-u\frac{\partial}{\partial x_1}(\Delta_1 v)+\right.\right.
$$

$$
\left.+(\Delta_1 v)\frac{\partial u}{\partial x_1}-(\Delta_1 u)\frac{\partial v}{\partial x_1}\right]\pi_1+
$$

$$
+\left[v\frac{\partial}{\partial y_1}(\Delta_1 u)-u\frac{\partial}{\partial y_1}(\Delta_1 v)+\right.
$$

$$
\left.+(\Delta_1 v)\frac{\partial u}{\partial y_1}-(\Delta_1 u)\frac{\partial v}{\partial y_1}\right]\pi_2-
$$

$$
-\left[v\frac{\partial}{\partial x_2}(\Delta_2 u)-u\frac{\partial}{\partial x_2}(\Delta_2 v)+\right.
$$

$$
\left.+(\Delta_2 v)\frac{\partial u}{\partial x_2}-(\Delta_2 u)\frac{\partial v}{\partial x_2}\right]\rho_1-
$$

$$
-\left[v\frac{\partial}{\partial y_2}(\Delta_2 u)-u\frac{\partial}{\partial y_2}(\Delta_2 v)+\right.
$$

$$
\left.\left.+(\Delta_2 v)\frac{\partial u}{\partial y_2}-(\Delta_2 u)\frac{\partial v}{\partial y_2}\right]\rho_2\right\}dS;
$$

这里 V 是 R_4 中有界闭域，S 是 V 的界面，$\pi_1,\pi_2,\rho_1,\rho_2$ 为 S 上内法线余弦。

特别，当 V 取为

$$(x_1-x_1^0)^2+(y_1-y_1^0)^2\leqslant r^2,$$
$$(x_2-x_2^0)^2+(y_2-y_2^0)^2\leqslant s^2,$$

V 的界面由两部分组成：

$$S_1:\ \begin{cases}(x_1-x_1^0)^2+(y_1-y_1^0)^2=r^2,\\(x_2-x_2^0)^2+(y_2-y_2^0)^2\leqslant s^2,\end{cases}$$

$$S_2:\ \begin{cases}(x_1-x_1^0)^2+(y_1-y_1^0)^2<r^2,\\(x_2-x_2^0)^2+(y_2-y_2^0)=s^2,\end{cases}$$

这时，基本公式可改写为

$$\iiiint\limits_V[vF(u)-uF(v)]dV=$$
$$=-\iiint\limits_S\Big[v\frac{\partial}{\partial n_i}(\Delta_i u)-u\frac{\partial}{\partial n_i}(\Delta_i v)+$$
$$+(\Delta_i v)\frac{\partial u}{\partial n_i}-(\Delta_i u)\frac{\partial v}{\partial n_i}\Big]dS,$$

必要时可带有限部分，即：

$$\mathrm{Pf}\iiint\limits_V[vF(u)-uF(v)]dV=$$
$$=-\ \mathrm{Pf}\iiint\limits_S\Big[v\frac{\partial}{\partial n_i}(\Delta_i u)-u\frac{\partial}{\partial n_i}(\Delta_i v)+$$
$$+(\Delta_i v)\frac{\partial u}{\partial n_i}-(\Delta_i u)\frac{\partial v}{\partial n_i}\Big]dS\qquad(38)$$

这里 n_i，相应 Δ_i，$i=1,2$，分别为 S 是 S_1 与 S_2 时的内法线方向。

3．解的中量

在基本公式(38)中，取 u 为方程(35)的正规解，v 为形如$\frac{1}{\Gamma}$的基本解，则有

$$\mathrm{Pf}\iiint\limits_{S_1}\left[v\frac{\partial}{\partial n_1}(\Delta_1 u)-u\frac{\partial}{\partial n_1}(\Delta_1 v)+\right.$$

$$\left.+(\Delta_1 v)\frac{\partial u}{\partial n_1}-(\Delta_1 u)\frac{\partial v}{\partial n_1}\right]dS_1=$$

$$=\mathrm{Pf}\iiint\limits_{S_2}\left[v\frac{\partial}{\partial n_2}(\Delta_2 u)-u\frac{\partial}{\partial n_2}(\Delta_2 v)+\right.$$

$$\left.+(\Delta_2 v)\frac{\partial u}{\partial n_2}-(\Delta_2 u)\frac{\partial v}{\partial n_2}\right]dS_2, \qquad (39)$$

对于

$$\Delta_1 u=\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}, \quad \Delta_2 u=\frac{\partial^2 u}{\partial s^2}+\frac{1}{s}\frac{\partial u}{\partial s},$$

则有

$$\mathrm{Pf}\iiint\limits_{S_1}\left[v\frac{\partial}{\partial n_1}(\Delta_1 u)-u\frac{\partial}{\partial n_1}(\Delta_1 v)+\right.$$

$$\left.+(\Delta_1 v)\frac{\partial u}{\partial n_1}-(\Delta_1 u)\frac{\partial v}{\partial n_1}\right]dS_1=$$

$$=\mathrm{Pf}\int_0^s\sigma d\sigma\int\limits_{\Omega_\beta}d\Omega_\beta\int\limits_{\Omega_\alpha}\left\{\frac{1}{r^2-\sigma^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}\right)-\right.$$

$$-\left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}\right)\left(-\frac{2r}{(r^2-\sigma^2)^2}\right)-$$

$$-u\frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{-4}{(r^2-\sigma^2)^2}+\frac{8r^2}{(r^2-\sigma^2)^3}\right]+$$

$$+\left[\frac{-4}{(r^2-\sigma^2)^2}+\frac{8r^2}{(r^2-\sigma^2)^3}\right]\frac{\partial u}{\partial r}\Big\}d\Omega.$$

$$=\mathrm{Pf}\int_0^s\frac{\sigma}{r^2-\sigma^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\right)M(r,\sigma)d\sigma+$$

$$+\mathrm{Pf}\int_0^s\frac{2r\sigma}{(r^2-\sigma^2)^2}\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\right)M(r,\sigma)d\sigma+$$

$$+\mathrm{Pf}\int_0^s\sigma\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{4}{(r^2-\sigma^2)^2}+\frac{8r^2}{(r^2-\sigma^2)^3}\right)\right]M(r,\sigma)d\sigma-$$

$$-\mathrm{Pf}\int_0^s\sigma\left(\frac{4}{(r^2-\sigma^2)^2}-\frac{8r^2}{(r^2-\sigma^2)^3}\right)\frac{\partial}{\partial r}M(r,\sigma)d\sigma,$$

其中

$$M(r,\sigma)=\int_{\Omega_\alpha}\int_{\Omega_\beta}u(x_1^0+\alpha_1 r,y_1^0+\alpha_2 r,x_2^0+\beta_1\sigma,$$

$$y_2^0+\beta_2\sigma)d\Omega_\alpha d\Omega_\beta,$$

同理,

$$\mathrm{Pf}\iiint_{S_2}\Big[v\frac{\partial}{\partial n_2}(\Delta_2 u)-(\Delta_2 u)\frac{\partial v}{\partial n_2}-u\frac{\partial}{\partial n_2}(\Delta_2 v)+$$

$$+(\Delta_2 v)\frac{\partial u}{\partial n_2}\Big]dS_2=$$

$$=\mathrm{Pf}\int_0^r\frac{\rho}{\rho^2-s^2}\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\partial^2}{\partial s^2}+\frac{1}{s}\frac{\partial}{\partial s}\right)M(\rho,s)d\rho-$$

$$-\mathrm{Pf}\int_0^r\frac{2\rho s}{(\rho^2-s^2)^2}\left(\frac{\partial^2}{\partial s^2}+\frac{1}{s}\frac{\partial}{\partial s}\right)M(\rho,s)d\rho-$$

$$-\mathrm{Pf}\int_0^r\rho\left[\frac{\partial}{ds}\left(\frac{4}{(\rho^2-s^2)^2}+\frac{8s^2}{(\rho^2-s^2)^3}\right)\right]M(\rho,s)d\rho-$$

$$-\mathrm{Pf}\int_0^r\rho\left[\frac{4}{(\rho^2-s^2)^2}+\frac{8s^2}{(\rho^2-s^2)^3}\right]\frac{\partial}{\partial s}M(\rho,s)d\rho,$$

其中

$$M(\rho,\ s)=$$

$$\iint\limits_{\Omega_\alpha\ \Omega_\beta} u(x_1^0+\rho\alpha_1, y_1^0+\rho\alpha_2, x_2^0+\beta_1 s, y_2^0+\beta_2 s)\,d\Omega_\alpha d\Omega_\beta.$$

故(39)化为

$$\mathrm{Pf}\int_0^s \frac{\sigma}{r^2-\sigma^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\right)M(r,\sigma)\,d\sigma+$$

$$+\mathrm{Pf}\int_0^s \frac{2r\sigma}{(r^2-\sigma^2)^2}\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\right)M(r,\sigma)\,d\sigma+$$

$$+\mathrm{Pf}\int_0^s \sigma\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{4}{(r^2-\sigma^2)^2}-\frac{8r^2}{(r^2-\sigma^2)^3}\right)\right]M(r,\sigma)\,d\sigma-$$

$$-\mathrm{Pf}\int_0^s \sigma\left(\frac{4}{(r^2-\sigma^2)^2}-\frac{8r^2}{(r^2-\sigma^2)^3}\right)\frac{\partial}{\partial r}M(r,\sigma)\,d\sigma=$$

$$=\mathrm{Pf}\int_0^r \frac{\rho}{(\rho^2-s^2)}\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\partial^2}{\partial s^2}+\frac{1}{s}\frac{\partial}{\partial s}\right)M(\rho,s)\,d\rho-$$

$$-\mathrm{Pf}\int_0^r \frac{2\rho s}{(\rho^2-s^2)^2}\left(\frac{\partial^2}{\partial s^2}+\frac{1}{s}\frac{\partial}{\partial s}\right)M(\rho,s)\,d\rho-$$

$$-\mathrm{Pf}\int_0^r \rho\left[\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{4}{(\rho^2-s^2)^2}+\frac{8s^2}{(\rho^2-s^2)^3}\right)\right]M(\rho,s)\,d\rho+$$

$$+\mathrm{Pf}\int_0^r \rho\left(\frac{4}{(\rho^2-s^2)^2}+\frac{8s^2}{(\rho^2-s^2)^3}\right)\frac{\partial}{\partial s}M(\rho,s)\,d\rho.$$

这是一个瑕积分有限部分方程，利用瑕积分有限部分的性质，上方程可以简化为

$$\frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{s}{r^2-s^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\right)M(r,\ s)\right]+$$

$$+\frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{2rs}{(r^2-s^2)^2}\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\right)M(r,\ s)\right]+$$

$$
+\frac{\partial}{\partial r}\left\{ s\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{4}{(r^2-s^2)^2}-\frac{8r^2}{(r^2-s^2)^3}\right)\right]M(r, s)\right\}-
$$

$$
-\frac{\partial}{\partial r}\left[s\left(\frac{4}{(r^2-s^2)^2}-\frac{8r^2}{(r^2-s^2)^3}\right)\frac{\partial}{\partial r}M(r, s)\right]=
$$

$$
=-\frac{\partial}{\partial s}\left[\frac{r}{s^2-r^2}\ \frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\partial^2}{\partial s^2}+\frac{1}{s}\ \frac{\partial}{\partial s}\right)M(r, s)\right]-
$$

$$
-\frac{\partial}{\partial s}\left[\frac{2rs}{(s^2-r^2)^2}\left(\frac{\partial^2}{\partial s^2}+\frac{1}{s}\ \frac{\partial}{\partial s}\right)M(r, s)\right]-
$$

$$
-\frac{\partial}{\partial s}\left\{ r\left[\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{4}{(s^2-r^2)^2}-\frac{8s^2}{(s^2-r^2)^3}\right)\right]M(r, s)\right\}
$$

$$
+\frac{\partial}{\partial s}\left[r\left(\frac{4}{(s^2-r^2)^2}-\frac{8s^2}{(s^2-r^2)^3}\right)\frac{\partial}{\partial s}M(r, s)\right].
$$

这里$M(r, s)$即方程(35)的解u沿$(x_1-x_1^0)^2+(y_1-y_1^0)^2=$ $=r^2$，$(x_2-x_2^0)^2+(y_2-y_2^0)^2=s^2$的中量。它所满足的偏微分方程，显然属于复合型方程。中量$M(r, s)$应具有什么性质，有待于对此复合型方程的求解。

第四章　超双曲型方程的境界值问题

§1　特征问题

考虑具 $2m$ 个变量的超双曲型方程

$$\sum_{i=1}^{m}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial y_i^2}\right)=0,\qquad (m\geqslant 2) \tag{1}$$

或缩写为

$$\Delta_x u=\Delta_y u$$

其中

$$\Delta_x\equiv\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial^2}{\partial x_i^2},\qquad \Delta_y=\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial^2}{\partial y_i^2},$$

$$u(x,y)\equiv u(x_1,\cdots,x_m,y_1,\cdots,y_m)$$

1．特征问题的级数解法

考虑方程(1)在 $m=2$ 时的情形，它具有以坐标原点为顶点的特征锥面

$$x_1^2+x_2^2-y_1^2-y_2^2=0, \tag{2}$$

在 x_1ox_2 平面引入极坐标 R，θ；在 y_10y_2 平面引入极坐标 r，ψ，则特征锥面的方程可写为

$$R-r=0.$$

方程(1)的解，作为 R，θ，r，ψ 的函数仍记为 u，今后，当改变自变量时，函数的记号不变。

定理 设在特征锥面(2)上给出函数 $v(r,\theta,\psi)$，它满足下列条件：

(1) $v(r,\theta,\psi)$可展为付里哀级数

$$v(r,\theta,\psi)=\sum_{m=0}^{\infty}[P_m(r,\theta)\cos m\psi+Q_m(r,\theta)\sin m\psi],$$

(2) 系数 $P_m(r,\theta)$与 $Q_m(r,\theta)$也可展为付里哀级数

$$P_m(r,\theta)=\sum_{k=0}^{\infty}[\mu_k^{(m)}(r)\cos k\theta+\nu_k^{(m)}(r)\sin k\theta],$$

$$Q_m(r,\theta)=\sum_{k=0}^{\infty}[\bar{\mu}_k^{(m)}(r)\cos k\theta+\bar{\nu}_k^{(m)}(r)\sin k\theta],$$

(3) 系数 $\mu_k^{(m)}(r),\nu_k^{(m)}(r),\bar{\mu}_k^{(m)}(r),\bar{\nu}_k^{(m)}(r)$ 都是 r 的解析函数，即可展为级数

$$\mu_k^{(m)}(r)=\sum_{(\lambda)}a_\lambda^{(m)(k)}r^\lambda, \tag{3}$$

$a_\lambda^{(m)(k)}$ 由依赖于 m,k,λ 的一组关系式定义，这些关系式，将在证明过程中给出。

则在区域 $R<r$ 内存在方程(1)的解 $u(R,\theta,r,\psi)$，它在特征锥面上取 $v(r,\theta,\psi)$的值，即

$$u(r,\theta,r,\psi)=v(r,\theta,\psi).$$

证：把方程(1)写为

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}-\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}-\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\psi^2}=0, \tag{1_1}$$

并寻求付里哀级数形式的解：

$$u(x_1,x_2,r,\psi)=\sum_{(m)}r^m[A(x_1,x_2,r)\cos m\psi+$$
$$+B_m(x_1,x_2,r)\sin m\psi],$$

代入(1_1)中得

$$\sum_{(m)}r^m\Big[\Big(\frac{\partial^2 A_m}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 A_m}{\partial x_2^2}-\frac{\partial^2 A_m}{\partial r^2}-\frac{2m+1}{r}\frac{\partial A_m}{\partial r}\Big)\cos m\psi+$$

$$+\left(\frac{\partial^2 B_m}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 B_m}{\partial x_2^2}-\frac{\partial^2 B_m}{\partial r^2}-\frac{2m+1}{r}\frac{\partial B_m}{\partial r}\right)\sin m\psi]=0, \tag{4}$$

由此得 A_m 与 B_m 满足达布方程：

$$\frac{\partial^2 A_m}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 A_m}{\partial x_2^2}-\frac{\partial^2 A_m}{\partial r^2}-\frac{2m+1}{r}\frac{\partial A_m}{\partial r}=0,$$

$$\frac{\partial^2 B_m}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 B_m}{\partial x_2^2}-\frac{\partial^2 B_m}{\partial r^2}-\frac{2m+1}{r}\frac{\partial B_m}{\partial r}=0.$$

利用边界条件，则有

$$A_m(x_1,x_2,r)=P_m(r,\theta)r^{-m},\ \text{当}\ x_1^2+x_2^2=r^2,$$

$$B_m(x_1,x_2,r)=Q_m(r,\theta)r^{-m},\ \text{当}\ x_1^2+x_2^2=r^2.$$

为了考察 $A_m(x_1,x_2,r)$ 所满足的达布方程及相应的边界条件的解，我们利用奇柯西问题：

$$\begin{cases}\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{\partial^2 w}{\partial x_i^2}-\dfrac{\partial^2 w}{\partial r^2}-\dfrac{n-1}{r}\dfrac{\partial w}{\partial r}=0,\\ w(x_1,\cdots,x_n,0)=\sigma(x_1,\cdots,x_n),\\ \dfrac{\partial w}{\partial r}(x_1,\cdots,x_n,0)=0\end{cases}$$

的解（参看柯朗、希尔伯特 数学物理方法卷Ⅱ，574-575）

$$w(x_1,x_2,\cdots,x_n,r)=$$
$$=\frac{1}{\omega_n}\int\limits_{\Omega_n}\cdots\int\sigma(x_1+\beta_1 r_1,\cdots,x_n+\beta_n r)d\omega_n,$$

这里 $\beta_1,\cdots,\beta_n$ 是向量 β 的投影，Ω_n 是单位球面，$d\omega_n$ 是其面积元素，ω_n 是其面积，σ 具二阶连续微商。作辅助奇柯西问题：

$$\begin{cases}\sum\limits_{i=1}^{2m+2}\dfrac{\partial^2 A_m}{\partial x_i^2}-\dfrac{\partial^2 A_m}{\partial r^2}-\dfrac{(2m+2)-1}{r}\dfrac{\partial A_m}{\partial r}=0,\\ A_m(x_1,\cdots,x_{2m+2},0)=f_m(x_1,\ x_2),\\ \dfrac{\partial A_m}{\partial r}(x,\ 0)=0,\end{cases}$$

这里 $x_i, i=3,\cdots,2m+2$ 是虚拟变元，通过降维法可知

$$A_m(x_1,x_2,r)=$$

$$=\frac{m}{\pi}r^{-2m}\int_{-r}^{r}\int_{-\sqrt{r^2-x_1^2}}^{\sqrt{r^2-x_1^2}} f_m(x+x_1,y+y_1)(r^2-x_1^2-x_2^2)^{m-1}dx_1dy_1,$$

或

$$A_m(R,\theta,r)=$$

$$=\frac{m}{\pi}r^{2m}\int_0^{2\pi}\int_0^{R\cos\varphi_1+\sqrt{R^2\cos^2\varphi_1+(r^2-R^2)}} f_m(\rho,\varphi_1+\theta)[r^2-\rho^2-R^2+2\rho R\cos\varphi_1]^{m-1}\rho d\rho d\varphi_1,$$

只要这里 $f_m(x_1,x_2)$ 具有两阶连续微商。

$f_m(R,\theta)$ 必须选得使边界条件被满足，即有

$$P_m(r,\theta)=\frac{mr^{-m}}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{2r\cos\varphi} f_m(R,\varphi+\theta)[-R^2+2Rr\cos\varphi]^{m-1}RdRd\varphi,$$

寻求付里哀级数形式的 $f_m(R,\theta)$：

$$f_m(R,\theta)=\sum_{k=0}^{\infty}[C_k^{(m)}(R)\cos k\theta+L_k^{(m)}(R)\sin k\theta],$$

为了确定系数 $C_k^{(m)}$ 与 $L_k^{(m)}$，得出方程

$$\mu_k^{(m)}(r)=\frac{m}{\pi}r^{-m}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{2r\cos\varphi} C_k^{(m)}(R)\cos k\varphi[-R^2+2Rr\cos\varphi]^{m-1}RdRd\varphi,$$

若命

$$C_k^{(m)}(R)=\sum_{(\lambda)}\beta_\lambda^{(m)(k)}R^\lambda, \qquad (5)$$

则

$$\beta_{\lambda}^{(m)(k)}=\frac{\pi}{m}\ \frac{\alpha_{\lambda+m}^{(m)(k)}}{2^{\lambda+2m}I_{\lambda}^{(m)}J_{\lambda}^{(m)(K)}},$$

这里

$$I_{\lambda}^{(m)}=\frac{(m-1)!(\lambda+m)!}{(\lambda+2m)!},$$

$$J_{\lambda}^{(m)(k)}=\frac{\pi}{2^{\lambda+2m}}\ \frac{\Gamma(\lambda+2m+1)}{\Gamma\left(\frac{\lambda+2m+k}{2}+1\right)\Gamma\left(\frac{\lambda+2m-k}{2}+1\right)}.$$

级数(5)与级数(3)具有同一收敛半径。

同样，讨论 $B_m(x_1,x_2,r)$，级数(3)为所提问题的解。

唯一性定理 方程(1)的解

$$u(x_1,x_2,r,\psi)=$$

$$=\sum_{(m)}r^m[A_m(x_1,x_2,r)\cos m\psi+B_m(x_1,x_2,r)\sin m\psi]$$

若存在，必唯一，此解在锥面

$$x_1^2+x_2^2-y_1^2-y_2^2=0,\qquad (y_1^2+y_2^2\leqslant B^2)$$

上取给定值，假定级数对所有自变量可以逐项微分两次，还假定 $A_m(x_1,x_2,r)$ 及其直到二阶微商当 $R\leqslant r$ 时连续。

2. 中量公式法概述

对于 $m>2$ 的情形，特征问题：

$$\begin{cases}\Delta_x u=\Delta_y u,\\ u|_{|x|=|y|}=\varphi(x,y),\end{cases}$$

这里 $u(x_1,\cdots,x_m,y_1,\cdots,y_m)\equiv u(x,y)$.

若解存在，这时应用阿斯盖生中量公式，则有

$$\int_{|z|^2=r^2}u(x+z,y)dS_z=\int_{|z|^2=r^2}u(x,y+z)dS_z,$$

假定在上面的公式里取 $x=0, r=|y|$，就得到

$$\int_{|z|^2=|y|^2} u(0,y+z)dS_z = \int_{|z|^2=|y|^2} \varphi(x,y)dS_z, \qquad (6)$$

显然这是对于函数 $u(0,y)$ 的积分方程，解此方程，得出在 $(0,y)$ 点函数 u 的值，为了求任意点 (x,y) ($|x|<|y|$) 处解 u 的值，我们可藉助超劳伦兹变换把点 (x,y) 变为形式 $(0,y)$ 的点，这样一来，问题就解决了。

(6) 的求解，首先基于下列积分几何的问题（ДАН. СССР. 140(1961)990)：

对于某函数 $G(z)/|z|^{n-2}$ 沿过坐标原点的球的的给定积分，即求解积分方程

$$\psi(x)=\frac{1}{|x|}\int_{|z|^2=(x,z)} \frac{G(z)}{|z|^{n-2}}dS_z,$$

这里

$$x=(x_1,\cdots,x_n), \qquad z=(z_1,\cdots,z_n),$$

$$|z|^2=(x,z):\ (z_1-\frac{1}{2}x_1)^2+\cdots+$$

$$+(z_n-\frac{1}{2}x_n)^2=\frac{1}{4}(x_1^2+\cdots+x_n^2),$$

它的解是

$$G(z)=\frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{(2\pi)^{n-1}}\frac{\partial^{n-1}}{\partial|z|^{n-1}}\int_{(x,z)=|z|^2} \psi(x)dS_x.$$

有了 $u(0,y)$，借助超劳伦兹变换可得 $u(x,y)$.

对于非齐次超双曲型方程的特征问题，藉上述方法，也可解决问题。

显然，中量公式法当 $m=2$ 时亦适用。

§ 2 狄立克雷问题

1. 记号

考虑四变元非齐次超双曲型方程

$$L[u]\equiv\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial y_1^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial y_2^2}=f(x_1,x_2,y_1,y_2) \quad (7)$$

设 $G(X)$ 表示二维笛氏空间 (x_1, x_2) 中一个开区域，$x\equiv(x_1, x_2)$ 表示 $G(X)$ 的点，$x^*\equiv(x_1^*, x_2^*)$ 表示 $G(X)$ 的境界 $G^*(X)$ 的点，$G^*(X)$ 是由有限个分段解析的弧构成。

对于域 $G(X)$ 的任一固有值及相应的固有函数分别记作 $\lambda(X)$ 和 $\phi(x)$，即 $\lambda(X)$ 和 $\phi(x)$ 是下列方程的解：

$$\Delta_x\phi(x)+\lambda(X)\phi(x)=0, \quad x\in G(X),$$

$$\phi(x)=0, \quad x\in G^*(X), \quad \int_{G(X)}\phi^2(x)dx=1,$$

其中 $\Delta_x=\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}$，$dx=dx_1dx_2$. 同 $G(X)$ 的情形一样，$G(Y)$ 表示二维笛氏空间的一个区域，$\mu(Y)$ 和 $\psi(y)$ 分别表示固有值及相应的固有函数，由所有的点 $(x, y)=(x_1, x_2, y_1, y_2)$ 组成的四维笛氏乘积区域用 $G=G(X)\times G(Y)$ 表示，其境界记为 G^*。

2. 唯一性

在证明唯一性定理之前，为陈述方便起见，再引进一些记号，$u=u(x,y)\in C^k(X,Y)$，表示 u 有 k 阶偏导数，而且这些偏导数在 G 的闭包 $\overline{G}$ 上是 (x,y) 的连续函数。$u=u(x,y)\in C^k(X)(C^k(Y))$ 表示 u 有对 $x(y)$ 的一切 k 阶偏导数，而且这些偏导数在 $\overline{G}$ 上是 (x, y) 的连续函数。

我们假定

$$u(x^*,y)=0,\ (x^*,y)\in G^*,\ x^*\in G^*(X),$$
$$u(x,y^*)=0,\ (x,y^*)\in G^*,\ y^*\in G^*(Y). \tag{8}$$

引理 1 若 $u(x,y)\in C^4(X,Y)$，则 $u(x,y)$ 等于绝对一致收敛级数

$$u(x,y)=\sum_{n,m=1}^{\infty} a_{nm}\phi_n(x)\psi_m(y), \tag{9}$$

$$a_{nm}=\int_{G(X)} dx\phi_n(x)\int_{G(Y)} u(x,y)\psi_m(y)dy.$$

〔注〕 在证明时，即使可微性减弱成 u，$\Delta_x u$，$\Delta_y u\in C^2(X)$和 $C^2(Y)$，引理 1 仍然正确。

证：因 $u(x,y)\in C^2(X)$并满足条件(8)，所以它有级数表示

$$u(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}\phi_n(x)\int_{G(X)} u(x,y)\phi_n(x)dx,$$

因 $\int_{G(X)} u(x,y)\phi_n(x)dx\in C^2(Y)$且在 $G^*(Y)$上为零，故有

$$u(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}\phi_n(x)\sum_{m=1}^{\infty}\psi_m(y)\int_G u(x,y)\phi_n(x)\psi_m(y)dxdy$$

积分中应用格林定理加以变换，而得

$$u(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}\phi_n(x)\sum_{m=1}^{\infty}\psi_m(y)\int_G[\Delta_y\Delta_x u/(\lambda_n\mu_m)]\phi_n(x)\psi_m(y)dxdy. \tag{10}$$

上面应用格林定理是可以的，因为 $\phi_n(x)$ ($\psi_m(y)$) 的一阶导数在$G(X)(G(Y))$上一致有界。

要证明展开式(9)成立，只需证明(10)绝对一致收敛，基于舒瓦兹不等式和贝塞尔不等式，则有

$$|u(x,y)|\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}|\phi_n(x)/\lambda_n|\sum_{m=1}^{\infty}|\psi_m(y)/\mu_m|\cdot$$

$$\cdot\left|\int_{G(Y)}dy\psi_m(y)\int_{G(X)}[\Delta_y\Delta_x u]\phi_n(x)dx\right|\leqslant$$

$$\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}|\phi_n(x)/\lambda_n|\left\{\left[\sum_{m=1}^{\infty}\psi_m^2(y)/\mu_m^2\right]\cdot\right.$$

$$\left.\cdot\int_{G(Y)}dy\left[\int_{G(X)}[\Delta_y\Delta_x u]\phi_n(x)dx\right]^2\right\}^{\frac{1}{2}}\leqslant$$

$$\leqslant\left[\sum_{n=1}^{\infty}\phi_n^2(x)/\lambda_n^2\right]^{\frac{1}{2}}\left[\sum_{m=1}^{\infty}\psi_m^2(y)/\mu_m^2\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$\left[\int_{G(Y)}dy\left\{\int_{G(X)}[\Delta_y\Delta_x u]\phi_n(x)dx\right\}^2\right]^{\frac{1}{2}}\leqslant$$

$$\leqslant\left[\sum_{n=1}^{\infty}\phi_n^2(x)/\lambda_n^2\right]^{\frac{1}{2}}\left[\sum_{m=1}^{\infty}\psi_m^2(y)/\mu_m^2\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$\left[\int_{G(Y)}dy\int_{G(X)}[\Delta_y\Delta_x u]^2dx\right]^{\frac{1}{2}},$$

由于$\Sigma\phi_n^2(x)/\lambda_n^2$和$\Sigma\psi_m^2(y)/\mu_m^2$是一致有界的，故引理 1 得证。

引理 2　若 $u(x,y)\in C^6(X,Y)$ 且 $\Delta_x u=\Delta_y u$，则

$$H(x,y)\equiv\sum_{n,m=1}^{\infty}\lambda_n a_{nm}\phi_n(x)\psi_m(y)=-\Delta_x u,\qquad(11_1)$$

$$I(x,y)\equiv\sum_{n,m=1}^{\infty}\mu_m a_{nm}\phi_n(x)\psi_m(y)=-\Delta_y u.\qquad(11_2)$$

〔注〕 证明时，即使 $u(x,y)\in C^2(X)$ 和 $C^2(Y)$，$\Delta_x u\in C^2(X)$，$\Delta_x^2 u\in C^2(Y)$，$\Delta_y u\in C^2(Y)$，$\Delta_y^2 u\in C^2(X)$，引理 2 仍然正确。

证： 先证(11_1)绝对一致收敛。显然

$$a_{nm}=-\lambda_n^{-1}\int_{G(Y)}dy\psi_m(y)\int_{G(X)}[\Delta_x u]\phi_m(x)dx,$$

因

$$\Delta_x u(x,y)_{x=x^*}=\Delta_y u(x^*,y)=0,$$

故上式可改变为

$$a_{nm}=\lambda_n^{-2}\int\limits_{G(Y)} dy\,\psi_m(y)\int\limits_{G(X)}\Delta_x^2 u\phi_n(x)dx,$$

$$a_{nm}=(-\mu_m\lambda_n^2)^{-1}\int\limits_{G(X)} dx\,\phi_m(x)\int\limits_{G(Y)}[\Delta_y\Delta_x^2 u]\psi_m(y)dy,$$

后一积分表示式是正确的，因为 $\Delta_x^2 u(x,y)_{y=y^*}=0$.

$H(x,y)$可作估计如下：

$$|H(x,y)|\leqslant\sum_{m=1}^{\infty}|\psi_m(y)/\mu_m|\sum_{n=1}^{\infty}|\phi_n(x)/\lambda_n|\cdot$$

$$\cdot\left|\int\limits_{G(X)} dx\,\phi_n(x)\int\limits_{G(Y)}[\Delta_y\Delta_x^2 u]\psi_m(y)dy\right|\leqslant$$

$$\leqslant\sum_{m=1}^{\infty}|\psi_m(y)/\mu_m|\left\{\sum_{n=1}^{\infty}\phi_n^2/\lambda_n^2\right]\cdot$$

$$\cdot\left[\int\limits_{G(X)} dx\left\{\int\limits_{G(Y)}[\Delta_y\Delta_x^2 u]\psi_m(y)dy\right\}^2\right]\Bigg\}^{\frac{1}{2}}\leqslant$$

$$\leqslant\left[\sum_{n=1}^{\infty}\phi_n^2(x)/\lambda_n^2\right]^{\frac{1}{2}}\left[\sum_{m=1}^{\infty}\psi_m^2(y)/\mu_m^2\right]^{\frac{1}{2}}\cdot$$

$$\left[\int\limits_{G(X)} dx\int\limits_{G(Y)}[\Delta_y\Delta_x^2 u]^2\,dy\right]^{\frac{1}{2}}.$$

上面不等式表示级数(11_1)具有所要求的收敛性。

其次证明 $H(x,y)=-\Delta_x u(x,y)$, 令 $K(x,y)$ 表示区域 $G(x)$的格林函数并注意固有值和固有函数是下列方程

$$\phi_n(x)=\lambda_n\int\limits_{G(X)} K(x,z)\phi_n(z)\,dz$$

的解。则根据级数$H(x, y)$的一致收敛性有

$$\int_{G(\boldsymbol{X})} K(x,z)H(z,y)dz=$$

$$=\sum_{n,m=1}^{\infty} a_{nm}\psi_m(y)\lambda_n \int_{G(\boldsymbol{X})} K(x,z)\phi_n(z)dz$$

$$=\sum_{n,m=1}^{\infty} a_{nm}\psi_m(y)\phi_n(x)=u(x,y).$$

此外，由于$u\in C^2(X)$，从而

$$u(x, y)=-\int_{G(\boldsymbol{X})} K(x,z)\Delta_z u(z,y)dz$$

所以有以下恒等式

$$V(x, y)\equiv\int_{G(\boldsymbol{X})} K(x, z)[H(x,y)+\Delta_z u(x,y)_{x=z}]dz\equiv 0$$

令$g(z,y)$表示上式积分号下方括号部分，则

$$V(x, y)\equiv\int_{G(\boldsymbol{X})} K(x,z)g(z,y)dz\equiv 0.$$

仿照位势理论的通常手续，我们来证明$g\equiv 0$。命Ω表示任意一个在$G(X)$内带有闭包的区域，Ω^*是Ω的境界，$\frac{d}{dn^*}$表示关于Ω^*的法微商，则

$$0=\int_{\Omega^*}\frac{dV}{dn^*}d\Omega^*=\int_{\Omega^*}d\Omega^*\int_{G(\boldsymbol{X})}\frac{dK}{dn^*}g(z, y)dz=$$

$$=\int_{G(\boldsymbol{X})}dz g(z,y)\int_{\Omega^*}\frac{dK}{dn^*}d\Omega^*,$$

由K的法微商的可加性，积分次序的交换是允许的。如所周

知，后一个积分当 z 是 Ω 的点时等于 -2π，当 z 在 $G(X)-$ $-\Omega$ 时等于零。因此，

$$-2\pi\int_{\Omega} g(z,\ y)dz=0,$$

由于 Ω 是任意选取的，并且 g 是一个连续函数，故可断定

$$g(z,y)\equiv 0,$$

即

$$-\Delta_x u(x,y)\equiv H(x,y).$$

同理可证

$$-\Delta_y u(x,y)\equiv I(x,y).$$

定理 1 设 $u(x,y)\in C^6(X,Y)$，并且是方程

$$\Delta_x u=\Delta_y u$$

的解，$(x,y)\in G\equiv G(X)\times G(Y)$，并设 u 在 G^* 上的边界值为零，那末，若 $|\lambda(X)-\mu(Y)|\neq 0$，则在 G 上 $u(x,y)\equiv 0$。

〔注〕 在对 u 的可微性要求降低为

$$u,\Delta_x u,\Delta_y u\in C^2(\boldsymbol{X})\text{和 } C^2(\boldsymbol{Y}),\ \Delta^2{}_x u\in C^2(\boldsymbol{Y}),\Delta^2{}_y u\in C^2(\boldsymbol{X}),$$

定理 1 仍然正确。适合这种可微性的函数，称为是属于类 D 的。

证：由引理 1 有

$$u(x,\ y)=\sum_{n,m=1}^{\infty} a_{nm}\phi_n(x)\psi_m(y),$$

又由引理 2 有

$$0=\Delta_x u-\Delta_y u=\sum_{n,m=1}^{\infty} a_{nm}(\mu_m-\lambda_n)\phi_n(x)\psi_m(y),$$

由于此级数绝对一致收敛，且系 $\{\phi_n(x)\psi_m(y)\}$，$(n,m=1,2,\cdots)$ 在 G 上是完备的，所以 $a_{nm}(\mu_m-\lambda_n)=0$。又因为假定固有值 λ_n 和 μ_m 是不同的，因此 $a_{nm}=0$。$(n,m=1,2,3,\cdots)$，即对一切 $(x,y)\in G$，$u(x,y)\equiv 0$。

3. 存在性

现在建立关于非齐次方程(7)的齐次边值问题的存在定理。证明时预先假定 f 在 G^* 上为零。对 $G=G(X)\times G(Y)$ 的限制是使得 $|\lambda(X)-\mu(Y)|$ 一致有界并且不等于零，这对于存在定理的证明来说，是一个不可缺少的条件。

再引进一些新的记号

$$D_x^k f(x,y)\quad (D_y^k f(x,y))$$

表示 $f(x,y)$ 的关于 $x(y)$ 的任何 k 阶偏导数；

$$D^k f(x,y)$$

表示 $f(x,y)$ 的任何 k 阶偏导数（$D^0 f(x,y)=f(x,y)$）。

定理 2 设 $G=G(X)\times G(Y)$ 使得 $|\lambda(X)-\mu(Y)|$ 有界且不等于零，又在 G 上 $f(x,y)\in C^{24}(X,Y)$。此外，还假定 $D^K f(x,y)$，$0\leqslant K\leqslant 22$ 在 G^* 上为零。则存在一个属于类 D 的函数 $u(x,y)$ 在 G^* 上为零，在 G 内是方程(7)的解。

证：假定存在这样的 $u(x,y)$，先确定它的级数展开式。若 $u\in D$，且是(7)的解，则引理 2 的结论仍然正确，这里象已经假定过的那样，以 f 在 G^* 上等于零为条件，有

$$u(x,\ y)=\sum_{n,m=1}^{\infty} a_{nm}\phi_n(x)\psi_m(y),$$

$$\Delta_x u-\Delta_y u=\sum_{n,m=1}^{\infty} a_{nm}(\mu_m-\lambda_n)\phi_n(x)\psi_m(y),$$

由于 $f\in D$，由引理 1 给出

$$f(x,y)=\sum_{n,m=1}^{\infty} b_{nm}\phi_n(x)\psi_m(y),$$

$$b_{nm}=\int_{G(X)} dx\phi_n(x)\int_{G(Y)} f(x,y)\psi_m(y)dy.$$

因而由于 $\{\phi_n(x)\psi_m(y)\}$ 在 G 上是完备的，(7)成立，便

得到

$$a_{nm}(\mu_m-\lambda_n)=b_{nm}, \qquad (n,m=1,2,3,\cdots)$$

由于 $\mu_m-\lambda_n$ 恒不为零，故有

$$u(x,y)=\sum_{n,m=1}^{\infty} b_{nm}/(\mu_m-\lambda_n)\phi_n(x)\psi_m(y). \qquad (*)$$

此刻我们要证明的是定理陈述中加于 $f(x, y)$ 的限制足以保证 $u\in D$ 并 $\Delta_x u-\Delta_y u=f(x,y)$. 根据定理 1，这样的 $u(x,y)$ 是唯一的。

在证明中，不可缺少的条件是加在 $|D^k\phi_n(x)|(0\leqslant k\leqslant 2)$ 上的限制。$G(X)$ 的境界是简单闭解析曲线，如何限制将在以后指出。

在 $G^*(X)$ 是由有限个解析弧构成的情形下，对固有函数 $\phi_n(x)$ 作如下的限制：

$$|\phi_n(x)|<A\lambda_n \quad (n=1,2,3,\cdots); \qquad (12_1)$$

$$|D^1\phi_n(x)|<A\lambda_n^2; \qquad (12_2)$$

$$|D^2\phi_n(x)|<A\lambda_n^3; \qquad (12_3)$$

$$|D^3\phi_n(x)|<A\lambda_n^4. \qquad (12_4)$$

现在有可能来证明 $u\in D$. (*) 给出方程

$$D_x^2 u(x,y)=\sum_{n,m=1}^{\infty}\frac{b_{nm}}{\mu_m-\lambda_n}\psi_m(y)D_x^2\phi_n(x),$$

$$D_y^2 u(x,y)=\sum_{n,m=1}^{\infty}\frac{b_{nm}}{\mu_m-\lambda_n}\phi_n(x)D_y^2\psi_m(y),$$

因而由 (12_4)，若

$$\sum_{n,m=1}^{\infty}|b_{nm}|\mu_m\lambda_n^3<\infty, \quad \sum_{n,m=1}^{\infty}|b_{nm}|\lambda_n\mu_m^3<\infty,$$

则 $u(x,y)$ 存在且 $\in C^2(X)$ 和 $C^2(Y)$，因之可知下列二方程成立：

$$\Delta_x u(x,y)=-\sum_{n,m=1}^{\infty}\frac{\lambda_n b_{nm}}{\mu_m-\lambda_n}\phi_n(x)\psi_m(y), \qquad (13_1)$$

$$\Delta_y u(x,y)=-\sum_{n,m=1}^{\infty}\frac{\mu_m b_{nm}}{\mu_m-\lambda_n}\phi_n(x)\psi_m(y), \qquad (13_2)$$

它们恰好表明

$$\Delta_x u-\Delta_y u=\sum_{n,m=1}^{\infty}b_{nm}\phi_n(x)\psi_m(y)=f(x,y),$$

若

$$\begin{aligned}&\sum_{n,m=1}^{\infty}|b_{nm}|\mu_m\lambda_n^4<\infty, \quad \sum_{n,m=1}^{\infty}|b_{nm}|\lambda_m^2\mu_n^3<\infty,\\ &\sum_{n,m=1}^{\infty}|b_{nm}|\lambda_n\mu_m^4<\infty, \quad \sum_{n,m=1}^{\infty}|b_{nm}|<\mu_n^2\lambda_m^8<\infty,\end{aligned} \qquad (14)$$

则由(13_1)和(13_2)可以断定$\Delta_x u$，$\Delta_y u\in C^2(X)$和$C^2(Y)$。不等式(14)指出

$$\Delta_x^2 u=\sum_{n,m=1}^{\infty}\frac{\lambda_n^2 b_{nm}}{\mu_m-\lambda_n}\phi_n(x)\psi_m(y),$$

$$\Delta_y^2 u=\sum_{n,m=1}^{\infty}\frac{\mu_m^2 b_{nm}}{\mu_m-\lambda_n}\phi_n(x)\psi_m(y).$$

故若

$$\sum_{n,m=1}^{\infty}|b_{nm}|\mu_n^8\lambda_m^8<\infty,$$

则 $\Delta_x^2 u\in C^2(Y)$，$\Delta_y^2 u\in C^2(X)$。

所以，为了证明$u\in D$，只须证明

$$\sum_{n,m=1}^{\infty}|b_{nm}|\mu_m^4\lambda_n^4<\infty,$$

因为$\Sigma\frac{1}{\lambda_n^3}<\infty$和$\Sigma\frac{1}{\mu_m^2}<\infty$，若

$$|b_{nm}|<\frac{B}{\lambda_n^6\mu_m^6}, \qquad (n,m=1,2,3,\cdots) \qquad (15)$$

则不等式一定是正确的。注意到 b_{nm}的表示式及固有函数，固有值的方程可知

$$
\begin{aligned}
b_{nm}= & \int\limits_{G(\boldsymbol{Y})} dy\psi_m(y) \int\limits_{G(\boldsymbol{X})} f(x,y)\phi_n(x)dx= \\
& = -\frac{1}{\lambda_n}\int\limits_{G(\boldsymbol{Y})} dy\psi_m(y) \int\limits_{G(\boldsymbol{X})} f(x,y)\Delta_x\phi_n(x)dx= \\
& = -\frac{1}{\lambda_n}\int\limits_{G(\boldsymbol{Y})} dy\psi_m(y) \int\limits_{G(\boldsymbol{X})} [\Delta_x^1 f]\phi_n(x)dx= \\
& = \left(-\frac{1}{\lambda_n}\right)^6 \int\limits_{G(\boldsymbol{Y})} dy\psi_m(y) \int\limits_{G(\boldsymbol{X})} [\Delta_x^6 f]\phi_n(x)dx,
\end{aligned}
$$

依次进行可以推出

$$
b_{nm}=(\lambda_n\mu_m)^{-6}\int\limits_{G(\boldsymbol{X})} dx\phi_m(x) \int\limits_{G(\boldsymbol{Y})} [\Delta_y^6(\Delta_x f)]\psi_m(y)dy,
$$

把舒瓦兹不等式应用于上式，便得出所希望的限制(15)，即

$$
|b_{nm}|\leqslant(\lambda_n\mu_m)^{-6}\left\{\int\!\!\int_G [\Delta_y^6(\Delta_x^6 f)]^2 dx\,dy\right\}^{\frac{1}{2}}.
$$

§ 3　具积分条件的边值问题

1. 记号

考虑四变元超双曲型方程

$$
\frac{\partial^2 u}{\partial y_1^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y_2^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}, \tag{16}
$$

记

$$
\int\limits_{G(\boldsymbol{X})} u dx=\iint\limits_{G(\boldsymbol{X})} u dx_1\,dx_2\,,\quad \int\limits_{G(\boldsymbol{Y})} u dy=\iint\limits_{G(\boldsymbol{Y})} u dy_1\,dy_2\,.
$$

拉普拉斯算子表作

$$\Delta_x^l u=\Delta_x(\Delta_x^{l-1}u) \text{ 或 } \Delta_y^l u=\Delta_y(\Delta_y^{l-1}u),$$
$$(l=0,1,2,\cdots)$$

这里

$$\Delta_x u=\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}, \quad \Delta_y u=\frac{\partial^2 u}{\partial y_1^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y_2^2},$$

而 $D_x^l u(D_y^l u)$ 表示 u 关于变元 (x_1, x_2) $((y_1, y_2))$ 的 l 阶偏导数 $(D_x^0 u=D_y^0 u=u)$。此外，任何和号的指标总是循正整数依次变化。

2． 固有函数族及其估计

相应于拉普拉斯算子及区域 $G(X)$ 的固有函数和固有值表示为 $\phi_n=\phi_n(X)$ 和 λ_n $(n=1,2,\cdots)$，它们满足：

$$\Delta_x\phi_n+\lambda_n\phi_n=0, \quad x\in G(X),$$
$$\phi_n(x)=0, \quad x\in G^*(X),$$
$$\int_{G(X)}\phi_n^2(x)dx=1,$$

设相应于 λ_n 的 ϕ_n 及其偏导数的模的最大值是已知的，事实上，哈麦斯坦，肖特证明了：

$$|D_x^k\phi_n|\leqslant C\lambda_n^{1+k}, \quad (k=0,1,2,3,\text{而 } n=1,2,\cdots)$$

这里 C 是不依赖于 x，y 的正常数，而 G^* 由有限个解析弧构成。

3． 存在定理的陈述

定理 1 存在着这样一个函数 $u(x,t)$，对 u，$D_x^l u, D_y^l u$ $(l=0,1,2)$ 在 $\overline{G}(X)\times G(Y)$ 上连续，而它分别满足超双曲型方程

$$\Delta_y u=\Delta_x u, \quad (x,y)\in G, \tag{16}$$

边界条件

$$u(x,y)=0,\quad (x,y)\in G^*(X)\times G(Y),\qquad (16_1)$$

和积分条件

$$\int_0^\infty u(x,y)ds=F(x,\theta),\quad (y_1+iy_2=se^{i\theta})\qquad (16_2)$$

此积分关于x，θ一致收敛。函数$F(x,\ \theta)$关于θ以2π为周期，且具有如下性质：

(1) $\Delta_x^l F(l=0,1,\cdots,5)$和$D_x^1(\Delta_x^l F)$ $(l=0,1,\cdots,4)$在$\bar{G}(X)\times I$上连续，$I=\{\theta|0\leqslant\theta\leqslant 2\pi\}$。

(2) $\Delta_x^l F(l=0,1,\cdots,5)$在$G^*(X)$上为零。

(3) 法微商$\dfrac{\partial\Delta_x^l F}{\partial\nu}(l=0,1,\cdots,5)$在$G^*(X)$上有界。

(4) $F(x,\ \theta)$和$\Delta_x^2 F$关于$(x,\ \theta)$一致地满足具有霍尔德指数$\alpha>\dfrac{1}{2}$的关于θ的霍尔德条件，即存在一个与x、θ无关的常数H，使得对于$(x,\theta_i)\in G(X)\times I, i=1,2$，有

$$|F(x,\theta_1)-F(x,\theta_2)|\leqslant H(\theta_1-\theta_2)^\alpha,$$
$$|\Delta_x^2 F(x,\theta_1)-\Delta_x^2 F(x,\theta_2)|\leqslant H|\theta_2-\theta_1|^\alpha.$$

4． 解的形式的级数表示

假定$u(x,y)$是(16)的这样的解，对于$(x,y)\in G^*(X)\times G(Y)$，它等于零，对于$(x,y)\in\bar{G}(X)\times G(Y)$，$D_x^k u(k==0,1,2)$是连续的，则$u(x,\ y)$可表作级数（柯朗、希尔伯特，数学物理方法，卷 I）

$$u(x,y)=\Sigma\phi_n(x)\int_{G(X)}u(x,y)\phi_n(x)dx=\Sigma v_n\phi_n(x),\qquad (17_1)$$

这里

$$v_m(y)=\int_{G(\boldsymbol{X})} u(x,y)\phi_n(x)dx, \tag{17_2}$$

现在假定 $u(x,y)$ 满足(16)，(16_1)，(16_2)并且 $D_y^k u(k=0,1,2)$ 在 $\overline{G}(X)\times G(Y)$ 上是连续的，则有

$$\Delta_y v_n=\int_{G(\boldsymbol{X})} \phi_n \Delta_y u dx=\int_{G(\boldsymbol{X})} \phi_n \Delta_x u dx=$$

$$=\int_{G(\boldsymbol{X})} u\Delta_x\phi_n dx+\int_{G^*(\boldsymbol{X})}\left[\phi_n\frac{\partial u}{\partial\nu}-u\frac{\partial\phi_n}{\partial\nu}\right]dG^* \tag{18}$$

这里$\frac{\partial u}{\partial\nu}$，$\frac{\partial\phi_n}{\partial\nu}$表示 u 和 ϕ_n 在 $G^*(X)$ 上的法微商，因为$\frac{\partial\phi_n}{\partial\nu}$ ($n=1, 2$) 在 $G^*(X)$ 上是一致有界的，注意到固有函数族 $D_x^k\phi_n$ 的估计，便知出现在(18)中的线积分为零，故 $v_n(y)$ 是亥姆霍兹方程

$$\Delta_y v_n+\lambda_n v_n=0, \quad y\in G(Y)$$

的解，而且由(16_2)与(17_2)，$v_n(y)$ 一定满足积分条件：

$$\int_0^\infty v_n(y)ds=\int_{G(\boldsymbol{X})} F(x,\theta)\phi_n dx\equiv F_n(\theta).$$

若能证明满足上述亥姆霍兹方程与积分条件的 v_n 唯一存在，则就完成了级数(17_1)代表所提问题的解，但需给出级数及其导数满足适当估计且(17_1)一致地满足积分条件(16_2)。

5． 亥姆霍兹方程

v_n 的唯一存在，基于如下定理(Tran. of the Amer. Math. Soc., vol. 88(1958) 388-399)：

定理 2 存在着唯一的 $v(y)$，其 $D_y^l v$ ($l=0, 1, 2$)在

$G(\Gamma)$上连续，$v(y)$同时满足亥姆霍兹方程

$$\Delta_y v+\lambda v=0$$

与积分条件

$$\int_0^{\infty} v(y)ds=f(\theta), \qquad (y_1+iy_2=se^{i\theta}),$$

此积分关于θ一致收敛，这里λ为正常数。

当然假定这里的$f(\theta)$是以2π为周期的函数，并具有如下性质：$f(\theta)$一致地满足具有霍尔德指数$\alpha>\frac{1}{2}$的霍尔德条件，即

$$|f(\theta_2)-f(\theta_1)|\leqslant H|\theta_2-\theta_1|^{\alpha}.$$

解$v(y)$有如下的表达式：

$$2\pi^2 v(y)=\pi\lambda^{\frac{1}{2}}\int_0^{2\pi} f(\phi)K_1(\lambda^{\frac{1}{2}}s,\ \phi-\theta)d\theta+$$

$$+\lambda^{\frac{1}{2}}\int_0^{2\pi} d\phi f(\phi)\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin\tau)^{-1}\cdot$$

$$\cdot[K_2(\lambda^{\frac{1}{2}}s,\tau+\phi-\theta)+K_2(\lambda^{\frac{1}{2}}s,\ \tau-\phi+\theta)]d\tau,$$

这里

$$K_1(s,\theta)=\cos(s\sin\theta);\quad K_2(s,\theta)=\sin(s\sin\theta).$$

根据此定理，显然v_n唯一存在，且明显地由上式$v(y)$给出。这样，$u(x,y)$的形式的级数为

$$u(x,y)=\Sigma v_n(y)\phi_n(x),$$

这里

$$2\pi^2 v_n(y)=\pi\lambda_n^{\frac{1}{2}}\int_0^{2\pi} F_n(\phi)K_1(\lambda_n^{\frac{1}{2}}s,\phi-\theta)d\phi+$$

$$+\lambda_n^{\frac{1}{2}}\int_0^{2\pi} d\phi F_n(\phi)\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin\tau)^{-1}$$

$$[K_2(\lambda_n^{-\frac{1}{2}}s, \tau+\phi-\theta)+K_2(\lambda_n^{-\frac{1}{2}}s, \tau-\phi+\theta)]d\tau,$$

$$F_n(\theta)=\int_{G(X)} F(x,\theta)\phi_n(x)dx.$$

6. 定 F_n、v_n、v_1 的导数、v_2 的导数的界

欲定 F_n 的界，假定 $\frac{\partial \Delta_x^l F}{\partial \nu}$ $(l=0,\cdots,k-1)$ 在 $G^*(X)$ 上有界，$\Delta_x^l F(x,\theta)$ $(l=0,1,\cdots,k-1)$ 在 $G^*(X)$ 上为零，则应用格林公式 $k-1$ 次得

$$F_n(\theta)=(-1)^k\lambda_n^{-k}\int_{G(X)}\phi_n\Delta_x^k F dx.$$

再应用舒瓦兹不等式于上式并利用

$$\int_{G(X)}\phi_n^2 dx=1,$$

就得到 F_n 的估计

$$|F_n(\theta)|\leqslant B_k\lambda_n^{-k},\ B_k^2=\underset{\theta\in I}{\mathrm{Max}}\int_{G(X)}[\Delta_x^k F]^2dx.$$

在定 F_n 界的假定下，令 $\mu=\underset{n=1,2,\cdots}{\mathrm{Max}}\ \lambda_n^{-\frac{1}{2}}$，则可定 v_n 的界。

命 $v_1=v_1(y,n)$，$v_2=v_2(y,n)$ 是由下列方程定义：

$$2\pi\lambda_n^{-\frac{1}{2}}v_1=\int_0^{2\pi}F_n(\phi)K_1(\lambda_n^{-\frac{1}{2}}s,\phi-\theta)d\phi,$$

$$2\pi\lambda_n^{-\frac{1}{2}}v_2=\pi^{-1}\int_0^{2\pi}d\phi F_n(\phi)\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin\tau)^{-1}$$

$$[K_2(\lambda_n^{-\frac{1}{2}}s,\ \tau+\phi-\theta)+$$

$$+K_2(\lambda_n^{-\frac{1}{2}}s,\ \tau-\phi+\theta)]d\tau,$$

因而

$$v_n(y)=v_1(y,n)+v_2(y,n),$$

故一旦知道 v_1 和 v_2 的估计，就得到 v_n 的估计。由 F_n 的估计和 v_1 的定义有

$$|v_1(y,n)|\leqslant\lambda^{\frac{1}{2}}\mathrm{Max}|F_n(\phi)|\leqslant B_k\lambda_n^{\frac{1}{2}-k}.$$

现在来求 v_2 的估计。令 $\delta=\phi-\theta$ 和

$$I(s,\delta)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin\tau)^{-1}[K_2(s,\tau+\delta)-K_2(s,\delta-\tau)]\,d\tau,$$

利用 F_n 的估计，估计

$$\pi|v_2(y,n)|\leqslant B_k\lambda_n^{\frac{1}{2}-k}\mathrm{Max}|I(\lambda_n^{\frac{1}{2}}s,\delta)|.$$

此外，根据中值定理有

$$|K_2(s,\tau+\delta)-K_2(s,\delta-\tau)|\leqslant$$
$$\leqslant s|\sin(\tau+\delta)-\sin(\delta-\tau)|=2s|\sin\tau\cos\delta|,$$

由此推出

$$|I(s,\delta)|\leqslant 2s\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\tau\leqslant\pi s.$$

因此有

$$|v_2(y,n)|\leqslant sB_k\lambda_n^{1-k},$$

故有 v_n 的估计：

$$|v_n(y)|\leqslant B_k\lambda_n^{1-k}(s+\mu).$$

欲定 v_1 的导数的界，定义

$$\alpha_2+i\alpha_1=-\exp(-i\phi),$$

并注意

$$y_1+iy_2=s\exp(i\theta),$$

便看出

$$K_1(\lambda_n^{-\frac{1}{2}}s,\phi-\theta)=\cos[\lambda_n^{-\frac{1}{2}}(\alpha_1y_1+\alpha_2y_2)],$$

因此由 v_1 定义的方程有

$$v_1=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\lambda_n^{-\frac{1}{2}}F_n(\phi)\ \cos[\lambda_n^{-\frac{1}{2}}(\alpha_1y_1+\alpha_2y_2)]d\phi,$$

因此，

$$\frac{\partial v_1}{\partial y_i}=-\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\alpha_i\lambda_nF_n(\phi)\sin[\lambda_n^{-\frac{1}{2}}(\alpha_1y_1+\alpha_2y_2)]d\phi,$$

$$\frac{\partial^2v_1}{\partial y_i\partial y_j}=-\frac{1}{2\pi}\lambda_n^{\frac{3}{2}}\int_0^{2\pi}\alpha_i\alpha_jF_n(\phi)\cos[\lambda_n^{-\frac{1}{2}}(\alpha_1y_1+$$

$$+\alpha_2y_2)]d\phi,$$

由最后这两个方程连同关于 F_n 的估计便得出如下的估计：

$$\left|\frac{\partial v_1}{\partial y_i}\right|\leqslant B_k\lambda_n^{1-k},$$

$$\left|\frac{\partial^2v_1}{\partial y_i\partial y_j}\right|\leqslant B_k\lambda_n^{\frac{3}{2}-k}.$$

现在定 v_2 导数的界，定义

$$\beta_2+i\beta_1=-\exp[-i(\tau+\phi)],$$

$$r_2+ir_1=\exp[i(\tau-\phi)],$$

并令

$$\Omega(y,\phi,\tau)\equiv K_2(\lambda_n^{-\frac{1}{2}}s,\tau+\phi-\theta)+K_2(\lambda_n^{-\frac{1}{2}}s,\tau-\phi+\theta),$$

可以看出

$$\Omega=\sin[\lambda_n^{-\frac{1}{2}}(\beta_1y_1+\beta_2y_2)]+\sin[\lambda_n^{-\frac{1}{2}}(r_1y_1+r_2y_2)],$$

因此由 v_2 定义的方程有

$$v_2=\frac{1}{2\pi^2}\int_0^{2\pi}d\phi\lambda_n^{-\frac{1}{2}}F_n(\phi)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\Omega(y,\phi,\tau)(\sin\tau)^{-1}d\tau,$$

Ω 对 y 的微商是

$$\frac{\partial \Omega}{\partial y_i}=\lambda_n^{\frac{1}{2}}\beta_i\cos\left[\lambda_n^{\frac{1}{2}}(\beta_1 y_1+\beta_2 y_2)\right]+$$

$$+\lambda_n^{\frac{1}{2}}r_i\cos\left[\lambda_n^{\frac{1}{2}}(r_1 y_1+r_2 y_2)\right],$$

$$\frac{\partial^2 \Omega}{\partial y_i \partial y_j}=-\lambda_n\beta_i\beta_j\sin\left[\lambda_n^{\frac{1}{2}}(\beta_1 y_1+\beta_2 y_2)\right]-$$

$$-\lambda_n r_i r_j\sin\left[\lambda_n^{\frac{1}{2}}(r_1 y_1+r_2 y_2)\right].$$

由这二式可得$\frac{\partial \Omega}{\partial y_i}$，$\frac{\partial^2 \Omega}{\partial y_i \partial y_j}$关于 τ 的导数的估计。由这些估计及下述事实：上二式左端对于 $\tau=0$ 为零，根据中值定理便得

$$\left|\frac{\partial \Omega}{\partial y_i}\right|\leqslant 2\lambda_n\tau(s+\mu),$$

$$\left|\frac{\partial^2 \Omega}{\partial y_i \partial y_j}\right|\leqslant 2\lambda_n^{\frac{3}{2}}(s+2\mu),$$

这里 $\mu=\operatorname*{Max}_{n=1,2,\cdots}\lambda_n^{-\frac{1}{2}}$.

现在有可能得出对于 $v_2(y,n)$一阶、二阶偏导数的估计。首先，这些导数由下列公式给出：

$$\frac{\partial v_2}{\partial y_i}=\frac{1}{2\pi^2}\int_0^{2\pi}d\phi\lambda_n^{\frac{1}{2}}F_n(\phi)\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin\tau)^{-1}\frac{\partial \Omega}{\partial y_i}d\tau,$$

$$\frac{\partial^2 v_2}{\partial y_i \partial y_j}=\frac{1}{2\pi^2}\int_0^{2\pi}d\phi\lambda_n^{\frac{1}{2}}F_n(\phi)\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin\tau)^{-1}\frac{\partial^2 \Omega}{\partial y_i \partial y_j}d\tau.$$

注意到 F_n 的估计式得

$$\left|\frac{\partial v_2}{\partial y_i}\right|\leqslant 2(s+\mu)B_k\lambda_n^{\frac{3}{2}-k}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\tau(\sin\tau)^{-1}d\tau\leqslant$$

$$\leqslant 2(s+\mu)CB_k\lambda_n^{\frac{3}{2}-k},$$

$$\left|\frac{\partial^2 v_2}{\partial y_i \partial y_j}\right| \leqslant 2(s+2\mu)B_k\lambda_n^{2-k}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\tau(\sin\tau)^{-1}d\tau \leqslant$$

$$\leqslant 2(s+2\mu)CB_k\lambda_n^{2-k},$$

常数C的选择同上。

因为$v_n(y)=v_1(y,n)+v_2(y,n)$，注意$\frac{\partial v_1}{\partial y_i}$，$\frac{\partial v_2}{\partial y_i}$，给出的估计，得

$$\left|\frac{\partial v_n}{\partial y_i}\right| \leqslant B_k\lambda_n^{\frac{3}{2}-k}[\mu+2C(s+\mu)].$$

再注意到$\frac{\partial^2 v_1}{\partial y_i \partial y_j}$，$\frac{\partial v_2}{\partial y_i \partial y_j}$的估计，有

$$\left|\frac{\partial^2 v_n}{\partial y_i \partial y_j}\right| \leqslant B_k\lambda_n^{2-k}[\mu+2C(s+\mu)].$$

7. 优级数

解$u(x,y)$可表示为级数的形式为

$$u(x,y)=\Sigma v_n(y)\phi_n(x), \tag{17$_1$}$$

这里，v_n是第4段指出的满足带积分条件的亥姆霍兹方程。上述解级数连同它的偏导数，利用以上的估计，给出以下的优关系：

$$\Sigma|v_n(y)\phi_n(x)| \leqslant CB_k(s+\mu)\Sigma\lambda_n^{2-k}, \tag{19$_1$}$$

$$\Sigma|v_n D_x^1\phi_n| \leqslant CB_k(s+\mu)\Sigma\lambda_n^{3-k}, \tag{19$_2$}$$

$$\Sigma|D_y^1 v_n\phi_n| \leqslant CB_k[\mu+2C(s+\mu)]\Sigma\lambda_n^{\frac{5}{2}-k}, \tag{19$_3$}$$

$$\Sigma|v_n D_x^2\phi_n| \leqslant CB_k(s+\mu)\Sigma\lambda_n^{4-k}, \tag{19$_4$}$$

$$\Sigma|D_y^2 v_n\phi_n| \leqslant CB_k[\mu+2C(s+\mu)]\Sigma\lambda_n^{3-k}, \tag{19$_5$}$$

$$\Sigma|v_n D_x^2\phi_n| \leqslant C_k B(s+\mu)\Sigma\lambda_n^{4-k}, \tag{19$_6$}$$

根据$\Sigma\lambda_n^{-2}<\infty$和以上的估计，就有如下的引理和系。

引理 级数(19_1)—(19_6)对于$k=6$在$G(X)\times G_N(Y)$的闭包上是一致收敛的。这里N是任意正的实数，而$G_N(Y)=\{(y_1, y_2)\mid -N\leqslant y_1,y_2\leqslant N\}$.

系 (17_1)中的$u(x,y)$和偏导数$D_y^l u$, $D_x^l u$, $(l=1,2)$在$G(X)\times G_N(Y)$的闭包上存在并连续，而且$u(x, y)$是超双曲型方程(16)的解。

至此，除了积分条件(16_2)尚须建立外，定理1的证明已经完成。

8. 积分条件的证明

本段中将证明$u(x,y)$适合

$$\int_0^\infty u(x,y)ds=F(x,\theta). \tag{20}$$

此积分对于$(x,\theta)\in G(X)\times I$一致收敛，因为级数$(17_1)$在$G(X)\times G_N(Y)$上一致收敛。

积分

$$\int_0^N u(x, y)ds=\Sigma\phi_n(x)\int_0^N v_n(y)ds,$$

需要讨论它当$N\to\infty$时的极限，即要建立下述引理。

引理 (17_1)中的$u(x,y)$使积分关系式(20)一致地保持有效。

证：因为$F(x,\theta)$具备定理1的条件，它可表成级数

$$F(x,\theta)=\Sigma F_n(\theta)\phi_n(x),$$

这里$F_n(\theta)$由第5段已指明，因此，

$$\int_0^N u(x,y)ds-F(x,\theta)=$$

$$=\Sigma\left[\int_0^N v_n(y)ds-F_n(\theta)\right]\phi_n(x), \tag{21}$$

命

$$F_{nk}(\theta)\equiv\int_{G(X)}\phi_n(x)\Delta_x^k F(x,\theta)dx,$$

由第6段讨论有

$$F_n(\theta)=(-1)^k\lambda_n^{-k}F_{nk}(\theta),$$

目前k是不变的，假设$\Delta_x^k F(x,\theta)$满足

$$|\Delta_x^k F(x,\theta_2)-\Delta_x^k F(x,\theta_1)|<H|\theta_2-\theta_1|^{\alpha},\ \left(\alpha>\frac{1}{2}\right),$$

H是一个绝对常数。随之，$F_{nk}(\theta)$将满足同样类型的具有一致有界的霍尔德指数的霍尔德条件，因此，若

$$v_{nk}=(-1)^k\lambda_n^k v_n,$$

则

$$\Delta_y v_{nk}+\lambda_n v_{nk}=0,$$

并且

$$\int_0^{\infty}v_{nk}(y)ds=F_{nk}(\theta), \tag{22}$$

此积分关于(n,θ)一致收敛(Trans. of the Amer. Math. soc. Vol. 88(1958)388-399)。因此(21)可写成

$$\int_0^N u(x,y)ds-F(x,\theta)=$$

$$=\Sigma(-1)^k\lambda_n^{-k}\left[\int_0^N v_{nk}(y)ds-F_{nk}(\theta)\right]\phi_n(x).$$

此外，对给定的$\varepsilon>0$，(22)的一致收敛性意指存在一个与(n,θ)无关的$N_0(\varepsilon)$，使得对一切$N\geqslant N_0(\varepsilon)$有

$$\left|\int_0^N v_{nk}(y)ds-F_{nk}(\theta)\right|<\varepsilon,$$

因而给出如下的不等式：

$$\left|\int_{\bullet}^{N} u(x,y)ds - F(x,\theta)\right| \leqslant$$

$$\leqslant \varepsilon \Sigma \lambda_n^{-k} |\phi_n(x)| \leqslant \varepsilon \left[\Sigma \lambda_n^{2(1-k)}\right]^{\frac{1}{2}} \left[\Sigma \phi_n^2(x) \lambda_n^{-2}\right]^{\frac{1}{2}},$$

因为 ε 后面的因子对于 $k=2$ 时是一致收敛的，故上不等式意指(20)是正确的。

9．解的唯一性

定理 3 假定存在一个 $u(x,y)$ 它具有在 $\overline{G}(X)\times G(Y)$ 上连续的 $D_x^l u$ 和 $D_y^l u$ $(l=0,1,2)$ 并分别满足超双曲型方程

$$\Delta_y u = \Delta_x u, \quad (x,y)\in G,$$

边界条件

$$u(x,0)=0, \quad (x,y)\in G^*(X)\times G(Y),$$

和积分条件

$$\int_0^{\infty} u(x,y)ds = 0,$$

此积分关于 (x,θ) 一致收敛，则 $u(x,y)$ 恒等于零。

证：根据加于 $u(x,y)$ 的边界条件和可微性条件，它有级数表示(17_1)，其中 v_n 由(17_2)给出，由积分条件的一致性，有

$$\int_0^{\infty} v_n(y)ds = \int_{G(X)} dx\phi_n(x) \int_0^{\infty} u(x,y)ds = 0,$$

根据定理 2，亥姆霍兹方程的唯一解由上式给出 $v_n(y)\equiv 0$，$(n=1,2,\cdots)$。因此由(17_1)表示的级数 $u(x,y)$ 在 $G(X)$ 上恒等于零。即定理 1 的解是唯一的。

§ 4 唯一性定理

考虑超双曲型方程

$$L[u]\equiv\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}-\sum_{k=1}^{m}\frac{\partial^2 u}{\partial y_k^2}=0,\ (n\geqslant 2, m\geqslant 2),\quad (23)$$

(23)的解的唯一性定理有以下三种。

定理 1 如果解 u 在超球 V 的表面 V^* 上给定了值，并且还假定它的法微商在以 V 的球心为顶点、方程(23)的特征锥所截 V^* 的两部分之一上给值，那末，方程(23)在超球 V 内存在的解是唯一的。

定理 2 在表面与坐标面平行的超平行多面体内存在方程(23)的解是唯一的，假定这个解在平行多面体的表面上给值，并且它的法微商在此平行多面体的一个表面上给值。

定理 3 在一个有界区域 C 内存在方程(23)的解是唯一的，假定解 u 在 C 的边界上给值，并且还假定 C 是被平面 $x_l=0$，$x_l+\sum_{k=1}^{m} b_k y_k=$常数，$\left(\sum_{k=1}^{m} b_k^2\geqslant 1\right)$ 所截的任何一个超园柱区域，它的母线平行于 x_l 轴。

现在证明定理 1，假定在 V 内存在着方程(23)的两个解，并且在 V^* 上具有相同的数据，那末它们的差仍为解，在 V^* 上取零值。因此只需证明此解在 V 内恒等于零就足够了。为了证明这个事实，引进符号：

$$\delta_{il}=\begin{cases}1, & i\neq l,\\ -1, & i=l.\end{cases}$$

并建立恒等式

$$2x_l\frac{\partial u}{\partial x_l}L[u]\equiv\sum_{i=1}^{n}\delta_{il}\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2-\sum_{k=1}^{m}\left(\frac{\partial u}{\partial y_k}\right)^2+$$
$$+\sum_{i=1}^{n}\left\{\frac{\partial}{\partial x_i}\left(2x_l\frac{\partial u}{\partial x_l}\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)-\frac{\partial}{\partial x_l}\left[x_l\left(\frac{\partial u}{\partial x_l}\right)^2\right]\right\}-$$
$$-\sum_{k=1}^{m}\left\{\frac{\partial}{\partial y_k}\left(2x_l\frac{\partial u}{\partial x_l}\frac{\partial u}{\partial y_k}\right)-\frac{\partial}{\partial x_l}\left[x_l\left(\frac{\partial u}{\partial y_k}\right)^2\right]\right\},$$

在V上积分上式得

$$\int_V 2x_l \frac{\partial u}{\partial x_l} L[u]\,dxdy=$$

$$=\int_V \sum_{i=1}^{n}\delta_{il}\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2 dxdy-\int_V \sum_{k=1}^{m}\left(\frac{\partial u}{\partial y_k}\right)^2 dxdy+$$

$$+\int_{V^*}\sum_{i=1}^{n}\left\{2x_l\frac{\partial u}{\partial x_l}\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial x_i}{\partial \nu}-x_l\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2\frac{\partial x_l}{\partial \nu}\right\}dV^*-$$

$$-\int_{V^*}\sum_{k=1}^{m}\left\{2x_l\frac{\partial u}{\partial x_l}\frac{\partial u}{\partial y_k}\frac{\partial y_k}{\partial \nu}-x_l\frac{\partial x_l}{\partial \nu}\left(\frac{\partial u}{\partial y_k}\right)^2\right\}dV^*,$$

设V的中心在坐标原点，而V的半径为1，则

$$\frac{\partial x_i}{\partial \nu}=x_i,\qquad \frac{\partial y_k}{\partial \nu}=y_k,$$

因此，

$$\int_V 2x_l \frac{\partial u}{\partial x_l} L[u]\,dxdy=$$

$$=\int_V \sum_{i=1}^{n}\delta_{il}\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2 dxdy-\int_V \sum_{k=1}^{m}\left(\frac{\partial u}{\partial y_k}\right)^2 dxdy-$$

$$-\int_{V^*}\sum_{i=1}^{n}\left[x_l\frac{\partial u}{\partial x_i}-x_i\frac{\partial u}{\partial x_l}\right]^2 dV^*+\int_{V^*}\sum_{i=1}^{n}x_i^2\left(\frac{\partial u}{\partial x_l}\right)dV^*+$$

$$+\int_{V^*}\sum_{k=1}^{m}\left[x_l\frac{\partial u}{\partial y_k}-y_k\frac{\partial u}{\partial x_l}\right]^2 dV^*-\int_{V^*}\sum_{k=1}^{m}y_k^2\left(\frac{\partial u}{\partial x_l}\right)^2 dV^*, \tag{I$_1$}$$

对上式关于l作和，有

$$\int_V \sum_{l=1}^{n}2x_l\frac{\partial u}{\partial x_l}L[u]\,dxdy=$$

$$=(n-2)\int_V \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2 dxdy-n\int_V \sum_{k=1}^{m}\left(\frac{\partial u}{\partial y_k}\right)^2 dxdy+$$

$$+\sum_{l=1}^{n}\sum_{k=1}^{m}\int_{V^*}\left[x_l\frac{\partial u}{\partial y_k}-y_k\frac{\partial u}{\partial x_l}\right]^2 dV^*-$$

$$-\sum_{l=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}\int_{V^*}\left[x_l\frac{\partial u}{\partial x_i}-x_i\frac{\partial u}{\partial x_l}\right]^2 dV^*+$$

$$+\int_{V^*}\left[\sum_{i=1}^{n}x_i^2-\sum_{k=1}^{m}y_k^2\right]\left[\sum_{l=1}^{n}\left(\frac{\partial u}{\partial x_l}\right)^2\right]dV^*,$$

另外，我们有

$$\int_V uL[u]dxdy=\int_V\sum_{k=1}^{m}\left(\frac{\partial u}{\partial y_k}\right)^2 dxdy-\int_V\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2 dxdy+$$

$$+\int_{V^*}u\left[\sum_{i=1}^{n}x_i\frac{\partial u}{\partial x_i}-\sum_{k=1}^{m}y_k\frac{\partial u}{\partial y_k}\right]dV^*,\quad (\mathrm{I}_2)$$

由上两式得

$$\int_V\left[\sum_{l=1}^{n}2x_l\frac{\partial u}{\partial x_l}+nu\right]L[u]dxdy=$$

$$=-2\int_V\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2 dxdy+$$

$$+\sum_{l=1}^{n}\sum_{k=1}^{m}\int_{V^*}\left[x_l\frac{\partial u}{\partial y_k}-y_k\frac{\partial u}{\partial x_l}\right]^2 dV^*-$$

$$-\sum_{l=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}\int_{V^*}\left[x_l\frac{\partial u}{\partial x_i}-x_i\frac{\partial u}{\partial x_l}\right]^2 dV^*+$$

$$+n\int_{V^*}u\left[\sum_{i=1}^{n}x_i\frac{\partial u}{\partial x_i}-\sum_{k=1}^{m}y_k\frac{\partial u}{\partial y_k}\right]dV^*+$$

$$+\int_{V^*}\left[\sum_{i=1}^{n}x_i^2-\sum_{k=1}^{m}y_k^2\right]\left[\sum_{l=1}^{n}\left(\frac{\partial u}{\partial x_l}\right)^2\right]dV^*.$$

由此，我们回想假定 u 在 V^* 上为零，并且注意到 $\left[x_l\frac{\partial u}{\partial y_k}-y_k\frac{\partial u}{\partial x_l}\right]$，$\left[x_l\frac{\partial u}{\partial x_i}-x_i\frac{\partial u}{\partial x_l}\right]$ 是在 V^* 的隐微商则有

$$\int_V\left[\sum_{i=1}^{n}2x_i\frac{\partial u}{\partial x_i}+nu\right]L[u]\,dxdy=$$

$$=-\int_V\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2dxdy+\int_{V^*}\left[\sum_{i=1}^{n}x_i^2-\sum_{k=1}^{m}y_k^2\right]\cdot$$

$$\cdot\left[\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2\right]dV^*,\quad (24)$$

和模双曲型方程的情形一样，方程(23)的解，受特征锥

$$\sum_{i=1}^{n}x_i^2-\sum_{k=1}^{m}y_k^2=0$$

上解 u 的值影响，在我们情况下，这个解的法微商仅仅在 V^* 的一部分

$$\sum_{i=1}^{n}x_i^2-\sum_{k=1}^{m}y_k^2\geqslant 0$$

上为零，因此由(24)推出

$$\int_V\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2dxdy=0,$$

这对我们说来就足够了，因为上式表示 u 不依赖于变量 x_i，即 u 是方程

$$\sum_{k=1}^{m}\frac{\partial^2 u}{\partial y_k^2}=0$$

的解。但由此式及在 V^* 上 $u=0$ 的事实，就保证 u 在 V 上为零，于是，定理 1 就被证明了。

定理 2 的证明并不特殊。首先假定超平行多面体限制在不等式

$$0\leqslant x_i\leqslant a_i,\quad 0\leqslant y_k\leqslant b_k,\qquad (a_i>0,\ b_k>0),$$

并设解的法微商在界面 $x_l=a_l$ 上为零，由于(I_1)和(I_2)有

$$\int_V\left[2x_l\frac{\partial u}{\partial x_l}+u\right]L[u]\,dxdy=-\int_V\left(\frac{\partial u}{\partial x_l}\right)^2dxdy,$$

假定 u 在 V 的界面上为零，并且 u 的法微商在界面 $x_l=a_l$ 为零，那末，因为 $L[u]\equiv 0$，解 u 便是与 x_l 无关的，因此如果在界面 $x_l=a_l$ 上 $u\equiv 0$ 时，在 V 上便有 $u\equiv 0$。

定理 3 的证明，应用完全类似的方法。

§ 5 解的显式、对初值的必要条件

1. 里曼方法的推广及显式解

设线性微分算子定义为

$$L[u]\equiv\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial x_4^2},$$

应用格林公式于 $L[u]$，可以写成

$$\iiiint\limits_T [vL[u]-uL[v]]dT=$$

$$=\iiint\limits_S\left[v\frac{\partial u}{\partial s}-u\frac{\partial v}{\partial s}\right]dS \tag{25}$$

这里 dT 是域 T 的体积元素，dS 是域 T 的境界 S 的面积元素，算子 $\frac{\partial}{\partial s}$ 是补法线微商，由下列表达式定义：

$$\frac{\partial}{\partial s}=\frac{\partial x_1}{\partial \nu}\frac{\partial}{\partial x_1}+\frac{\partial x_2}{\partial \nu}\frac{\partial}{\partial x_2}-\frac{\partial x_3}{\partial \nu}\frac{\partial}{\partial x_3}-\frac{\partial x_4}{\partial \nu}\frac{\partial}{\partial x_4},$$

这里 $\frac{\partial x_i}{\partial \nu}$ 是曲面 S 的外法线方向余弦。

如 $L[u]$ 等于零，我们得到

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial x_4^2}=0, \tag{26}$$

即四变元的超双曲型方程，这方程的特征锥为

$$x_1^2+x_2^2-x_3^2-x_4^2=0,$$

这特征锥以坐标原点为顶点。

在格林公式(25)中，我们代替 u 以 $\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_k}$，代 v 以 w_{ik}，若作和 $1\leqslant i\leqslant k\leqslant 4$，我们得到

$$\iiiint\limits_T \left\{\sum_{1\leqslant i\leqslant k\leqslant 4}\left[w_{ik}\, L\left[\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_k}\right]-\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_k} L[w_{ik}]\right]\right\} dT=$$

$$=\iiint\limits_S \left\{\sum_{1\leqslant i\leqslant k\leqslant 4}\left[w_{ik}\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_k}\right)-\right.\right.$$

$$\left.\left.-\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_k}\right)\frac{\partial w_{ik}}{\partial s}\right]\right\} dS,$$

这里 w_{ik} 是即将定义的函数，T 是单连有界集被初始超曲面 Γ 与特征锥 C 确定，我们自然假定 C 的顶点属于 T 的境界 S，而且不在 Γ 上，为明显起见，假定 T 的所有点位于锥 C 特定的一边，即使保持下列不等式

$$x_1^2+x_2^2-x_3^2-x_4^2>0.$$

在特征锥 C 上，补法线微商两次的运算记为 $\frac{\partial^2}{\partial s^2}$，有

$$\frac{\partial^2}{\partial s^2}=\sum_{i=1}^4\left(\frac{\partial x_i}{\partial \nu}\right)^2\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}+$$

$$+2\sum_{1\leqslant i\leqslant k\leqslant 4}\delta_i\delta_k\frac{\partial x_i}{\partial \nu}\frac{\partial x_k}{\partial \nu}\frac{\partial^2}{\partial x_i x \partial_k},$$

这里 $\frac{\partial x_i}{\partial \nu}$ 是 C 的外法线方向余弦，而 $\delta_1=\delta_2=1$，$\delta_3=\delta_4=-1$.

函数 w_{ik} 在 C 上需满足下列条件：

$$w_{ik}=\begin{cases}\left(\dfrac{\partial x_i}{\partial\nu}\right)^2, & i=k,\\ 2\delta_i\delta_k\dfrac{\partial x_k}{\partial\nu}, & i\neq k,\end{cases}\quad 1\leqslant i\leqslant k\leqslant 4, \tag{27}$$

即在特征锥上我们有

$$\frac{\partial^2}{\partial s^2}=\sum_{1\leqslant i\leqslant k\leqslant 4} w_{ik}\frac{\partial^2}{\partial x_i\partial x_k},$$

附加条件(27)要求函数 w_{ik} 是超双曲型方程(26)的解，即

$$L[w_{ik}]=0,$$

由于(26)的解 u 为充分正规的函数，于是得

$$\iiint\limits_{C+\Gamma}\left\{\sum_{1\leqslant i\leqslant k\leqslant 4}\left[w_{ik}\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\partial x_k}\right)-\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\partial x_k}\right)\frac{\partial w_{ik}}{\partial s}\right]\right\}dS=0, \tag{28}$$

这里 T 的境界 S 代以 $C+\Gamma$。为了得到沿特征锥 C 的明显的积分，我们用下列等式定义 C：

$$\begin{aligned}x_1&=r\cos\theta,\ x_2=r\sin\theta,\\ x_3&=p\cos\psi,\ x_4=p\sin\psi,\end{aligned}\qquad (0\leqslant r,\ p<\infty).$$

其中 $r=p=2^{-\frac{1}{2}}s$，s 表示从原点至锥上一点 (x_1,x_2,x_3,x_4) 的距离。注意对固定的 θ，ψ，上述等式的轨迹当 $r=p$ 则是锥的母线，容易看出在 C 上补法微商等于对 s 的微商，即沿 C 的母线对于长度的微商等于运算 $\frac{\partial}{\partial s}$，在 C 上的面积元素为

$$dS=\frac{1}{2}s^2\,ds\,d\theta\,d\psi,$$

由(27)在 C 上 $\frac{\partial w_{ik}}{\partial s}=0$，故沿 C 的积分是

$$\iiint_C \left\{\frac{\partial}{\partial s}\left[\sum_{1\leqslant i\leqslant k\leqslant 4} w_{ik}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_k}\right]\right\} dS =$$

$$= \frac{1}{2}\iiint_C \frac{\partial^3 u}{\partial s^3} s^2\, ds d\theta d\psi,$$

这是因为在C上由于

$$\sum_{1\leqslant i\leqslant k\leqslant 4} w_{ik}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_k}$$

显然是u对距离s的二阶微商。命$\rho=\rho(\theta,\psi)$表示从C的顶点P到由θ，ψ决定的母线交曲面Γ的点的距离，运用部分积分可得到

$$\int_0^\rho \frac{\partial^3 u}{\partial s^3} s^2\, ds = \rho^2 \frac{\partial^2 u}{\partial s^2} - 2\rho\frac{\partial u}{\partial s} + 2u - 2u(P),$$

等式右端前三项的自变元(x_1, x_2, x_3, x_4)分别代以$2^{-\frac{1}{2}}\rho\cos\theta$，$2^{-\frac{1}{2}}\rho\sin\theta$，$2^{-\frac{1}{2}}\rho\cos\psi$，$2^{-\frac{1}{2}}\rho\sin\psi$，而$u(P)$表示$u$在$P$点的值，用(28)我们得到：

$$\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\rho^2\frac{\partial^2 u}{\partial s^2} - 2\rho\frac{\partial u}{\partial s} + 2u\right)d\theta d\psi - 4\pi^2 u(P) +$$

$$+\iiint_\Gamma \left\{\sum_{1\leqslant i\leqslant k\leqslant 4}\left[w_{ik}\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_k}\right) - \right.\right.$$

$$\left.\left. - \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_k}\right)\frac{\partial w_{ik}}{\partial s}\right]\right\} dS = 0$$

或 $$8\pi^2 u(P) = \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\rho^2\frac{\partial^2 u}{\partial s^2} - 2\rho\frac{\partial u}{\partial s} + 2u\right)d\theta d\psi +$$

$$+2\iiint_\Gamma \left\{\sum_{1\leqslant i\leqslant k\leqslant 4}\left[w_{ik}\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_k}\right) - \right.\right.$$

$$\left.\left. - \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_k}\right)\frac{\partial w_{ik}}{\partial s}\right]\right\} dS,$$

在第一个积分中，$\frac{\partial}{\partial s}$表示在$C$上的补法线微商，第二个积分中，$\frac{\partial}{\partial s}$表示在曲面$\Gamma$上的补法线微商。

2. 里曼函数

在区域T的内部，函数w_{iK}满足$L[w_{iK}]=0$，在特征锥上满足下列特征初值：

$$w_{ik}=\begin{cases}\left(\frac{\partial x_i}{\partial \nu}\right)^2 & i=k, \\ 2\delta_i\delta_k\frac{\partial x_i}{\partial \nu}\ \frac{\partial x_k}{\partial \nu}, & i\neq k,\end{cases}\quad 1\leqslant i\leqslant k\leqslant 4,$$

函数w_{iK}称为方程$L]u]=0$的里曼函数。

我们作如下坐标变换：

$$\begin{aligned}&x_1=r\cos\theta,\ x_2=r\sin\theta,\\&x_3=p\cos\psi,\ x_4=p\sin\psi,\end{aligned}\qquad (0\leqslant r,p<\infty)$$

方程(26)化为

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\ \frac{\partial u}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\ \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial p^2}-\frac{1}{p}\ \frac{\partial u}{\partial p}-\frac{1}{p^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \psi^2}=0, \tag{29}$$

特征初值变为

$$\begin{cases}w_{11}=\frac{1}{2}\cos^2\theta, w_{12}=\sin\theta\cos\theta, w_{13}=\cos\theta\cos\psi,\\ w_{14}=\cos\theta\sin\psi, \\ w_{22}=\frac{1}{2}\sin^2\theta, w_{23}=\sin\theta\cos\psi, w_{24}=\sin\theta\sin\psi,\\ w_{33}=\frac{1}{2}\cos^2\psi,\ w_{34}=\sin\psi\cos\psi,\ w_{44}=\frac{1}{2}\sin^2\psi,\end{cases} \tag{29_1}$$

假定(29)的解具有数据(29_1)，而且在区域$r-p>0$是正规

的，此区域的境界C等价于$r=p$。求w_{ik}使具有下列两种形式之一：

$$w_{ik}=\text{const}+f(\theta,\psi)g\left(\frac{p^2}{r^2}\right)$$

或

$$w_{ik}=\text{const}+f(\theta,\psi)g\left(\frac{p^2}{r^2}-r^2-p^2\right).$$

里曼函数可给出如下：

$$w_{11}=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\cos 2\theta\left[1+\left(1-\frac{p^2}{r^2}\right)\log(r^2-p^2)\right];$$

$$w_{12}=\frac{1}{2}\sin 2\theta\left[1+\left(1-\frac{p^2}{r^2}\right)\log(r^2-p^2)\right];$$

$$w_{13}=\frac{p}{r}\cos\theta\cos\psi;$$

$$w_{14}=\frac{p}{r}\cos\theta\sin\psi;$$

$$w_{22}=\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\cos 2\theta\left[1+\left(1-\frac{p^2}{r^2}\right)\log(r^2-p^2)\right];$$

$$w_{23}=\frac{p}{r}\sin\theta\cos\psi;$$

$$w_{24}=\frac{p}{r}\sin\theta\sin\psi;$$

$$w_{33}=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\cos 2\psi\left[1+\left(\frac{r^2}{p^2}-1\right)\right];$$

$$w_{34}=\frac{1}{2}\sin 2\psi\left[1+\left(\frac{r^2}{p^2}-1\right)\log\left(1-\frac{p^2}{r^2}\right)\right];$$

$$w_{44}=\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\cos 2\psi\left[1+\left(\frac{r^2}{p^2}-1\right)\log\left(1-\frac{p^2}{r^2}\right)\right].$$

3. 对初值的必要条件

借助阿斯盖生定理可以证明在非特征超平面任意给定初值，其柯西问题一般是不可能的，问题是为了能解(26)，允许什么初值？下面将引出它的必要条件。

我们从用过的格林公式开始考虑，由上段的讨论，我们有

$$\iiint_{\Gamma}\Big\{\sum_{1\leqslant i\leqslant k\leqslant 4}\Big[w_{ik}\frac{\partial}{\partial s}\Big(\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\partial x_k}\Big)-\Big(\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\partial x_k}\Big)\frac{\partial w_{ik}}{\partial s}\Big]\Big\}dS+$$

$$+\frac{1}{2}\iiint_{C}\frac{\partial^3 u}{\partial s^3}s^2\,ds\,d\theta\,d\psi=0,$$

如上段一样，运用分部积分，我们得到

$$\frac{1}{2}\iiint_{C}\frac{\partial^3 u}{\partial s^3}s^2\,ds\,d\theta\,d\psi=$$

$$=\frac{1}{2}\iint\Big(\rho^2\frac{\partial^2 u}{\partial s^2}-2\rho\frac{\partial u}{\partial s}+2u\Big)d\theta\,d\psi-u(P)\iint d\theta\,d\psi,$$

我们得到

$$I(\theta,\psi)u(P)=\frac{1}{2}\iint\Big(\rho^2\frac{\partial^2 u}{\partial s^2}-2\rho\frac{\partial u}{\partial s}+2u\Big)d\theta\,d\psi+$$

$$+\iiint_{\Gamma}\Big\{\sum_{1\leqslant i\leqslant k\leqslant 4}\Big[w_{ik}\frac{\partial}{\partial s}\Big(\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\partial x_k}\Big)-\Big(\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\partial x_k}\Big)\frac{\partial w_{ik}}{\partial s}\Big]\Big\}dS, \tag{30}$$

其中

$$I(\theta,\psi)=\iint d\theta\,d\psi,$$

这里二重积分依赖于 Γ 和 P，要得到 $\frac{\partial u(P)}{\partial x_i}$ 的值，我们只需在(30)中以 $\frac{\partial u}{\partial x_i}$ 代 u，为便利起见，命 $v\equiv\frac{\partial u(P)}{\partial x_i}$，则有

$$I(\theta,\psi)\frac{\partial u(P)}{\partial x_i}=\frac{1}{2}\iint\left(\rho^2\frac{\partial^2 v}{\partial s^2}-2\rho\frac{\partial v}{\partial s}+2v\right)d\theta d\psi+$$

$$+\iiint_{\Gamma}\left\{\sum_{1\leqslant i\leqslant k\leqslant 4}\left[w_{ik}\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x_i\partial x_k}\right)-\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x_i\partial x_k}\right)\frac{\partial w_{ik}}{\partial s}\right]\right\}dS,\tag{30$_1$}$$

若$\frac{\partial x_i}{\partial\nu}$表示$\Gamma$的法线方向余弦，则在$\Gamma$上的法微商为

$$\frac{\partial u}{\partial\nu}=\Sigma\frac{\partial x_i}{\partial\nu}\ \frac{\partial u}{\partial x_i},\tag{31}$$

方程(30$_1$)与(31)确定在Γ上u的法微商必需满足的等式。

现在讨论一特定的情形，考虑区域$G(R)$为由半径为R的超球面，以P点为顶点的特征锥以及超平面$x_1=0$所定义，若作坐标变换

$$\begin{aligned}&x_1=r\cos\theta,\ x_2=r\sin\theta,\\&x_3=p\cos\theta,\ x_4=p\sin\theta,\end{aligned}\qquad(0\leqslant r,p<\infty)\tag{32}$$

则$G(R)$的解析定义是：

$$r^2+p^2<R^2,\ r^2-p^2>0,\ \cos\theta>0,$$

这时有

$$\iiint_{S+P}\left\{\sum_{1\leqslant i\leqslant k\leqslant 4}\left[w_{ik}\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\partial x_k}\right)-\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\partial x_k}\right)\frac{\partial w_{ik}}{\partial s}\right]\right\}dS+$$

$$+\frac{1}{2}\iiint_C\frac{\partial^3 u}{\partial s^3}s^2\,ds\,d\theta\,d\psi=0,\tag{33}$$

这里$\overline{S}$，C，$\overline{P}$分别为超球面，锥面与平面上的部分境界。在最后的积分中，u的自变元是(32)，沿C即$r=p=2^{-\frac{1}{2}}s$。对于固定的θ，ψ，且$r=p=2^{-\frac{1}{2}}$，(32)定义为过P点的

特征锥的母线，此母线交曲面 $\bar{S}$ 于距 P 点有距离 $s=R$ 处，由此，它可写为

$$\int_0^R \frac{\partial^3 u}{\partial s^3} s^2 ds = R^2 \frac{\partial^2 u}{\partial s^2} - 2R\frac{\partial u}{\partial s} + 2u(R) - 2u(P),$$

因为 $\cos\theta > 0$, $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$，(33)化为

$$\frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{2\pi}\left(R^2\frac{\partial^2 u}{\partial s^2} - 2R\frac{\partial u}{\partial s} + 2u\right)d\psi - 2\pi^2 u(P) +$$

$$+ \iiint_{\bar{S}+\bar{P}} \left\{\sum_{1\leqslant i\leqslant k\leqslant 4}\left[w_{ik}\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_k}\right) - \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_k}\right)\frac{\partial w_{ik}}{\partial s}\right]\right\} dS$$

$$=0,$$

假定 u 及其微商当 $R\to\infty$ 时充分快地趋于零，这就保证上式中取在 $\bar{S}$ 上的所有积分为零，因此得

$$2\pi^2 u(P) = \iiint_A \left\{\sum_{1\leqslant i\leqslant k\leqslant 4}\left[\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_k}\,\frac{\partial w_{ik}}{\partial s} - w_{ik}\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_k}\right)\right]\right\} dx_2 dx_3 dx_4,$$

这里 A 是三维区域 $x_2^2 - p^2 > 0$，命 $v \equiv \frac{\partial u}{\partial x_i}$，我们得到

$$2\pi^2 \frac{\partial u}{\partial x_i} = \iiint_A \left\{\sum_{1\leqslant i\leqslant k\leqslant 4}\left[\frac{\partial^2 v}{\partial x_i \partial x_k}\,\frac{\partial w_{ik}}{\partial s} - w_{ik}\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x_i \partial x_k}\right)\right]\right\} dx_2 dx_3 dx_4,$$

因之，初值满足一组积分微分方程。

§ 6　边值问题的显式解

§ 5讨论解的显式以及初值的必要条件，实际仅指出四个变元的情形。讨论的问题是从基本公式出发，引出里曼函数得到积分显式解，可视为里曼方法的推广。以下我们从基本公式、基本解出发讨论边值问题的显式解。

1.　基本公式、基本解

考虑超双曲型方程

$$F(u)\equiv\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}-\sum_{j=m+1}^{2m}\frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2}=0,\quad (m\geqslant 2)\quad (34)$$

则有基本公式

$$\mathrm{Pf}\iint_V\cdots\int[vF(u)-uF(v)]dV=$$

$$=-\mathrm{Pf}\int_S\cdots\int\left(v\frac{du}{d\nu}-u\frac{dv}{d\nu}\right)dS\qquad(35)$$

其中S是$2m$维空间内一个闭曲面，它范围着一个体积V，ν的方向是S的补法线，由下式定义：

$$\frac{dx_1}{\frac{1}{2}\frac{\partial\mathscr{A}}{\partial\pi_1}}=\cdots=\frac{dx_m}{\frac{1}{2}\frac{\partial\mathscr{A}}{\partial\pi_m}}=\cdots=\frac{dx_{2m}}{\frac{1}{2}\frac{\partial\mathscr{A}}{\partial\pi_{2m}}}=d\nu,$$

$$\mathscr{A}=\sum_{i=1}^{m}\pi_i^2-\sum_{j=m+1}^{2m}\pi_j^2,$$

$$\pi_k=\frac{\partial G}{\partial x_k},\qquad k=1,2,\cdots,2m,$$

$$S:\ G(x_1,x_2,\cdots,x_{2m})=0.$$

方程(34)的基本解是Γ^{1-m}，这里

$$\Gamma=\sum_{i=1}^{m}(x_i-x_i^0)^2-\sum_{j=m+1}^{2m}(x_j-x_j^0)^2$$

是 $2m$ 维空间动点 $x=(x_1,\cdots,x_{2m})$ 与定点 $x^0=(x_1^0,\cdots,x_{2m}^0)$ 两点测地距离的平方。

从基本公式(35)出发，可得超双曲型方程(34)的解的如下性质。

2. 解的性质

性质 1 超双曲型方程(34)的解的补法线微商沿闭域边界面的瑕积分有限部分等于零，即

$$\mathrm{Pf}\int_S\cdots\int\frac{du}{d\nu}dS=0。$$

事实上，在基本公式(35)中，取 u 为超双曲型方程(34)的解，$v=1$，立刻得到上式。由于 u 的正规性，上式左端为正常积分，显然有

$$\int_S\cdots\int\frac{du}{d\nu}dS=0,$$

故性质 1 可改叙述为：超双曲型方程(34)的解的补法线微商沿闭域边界面的积分为零。

性质 2 设 V 是 R_{2m} 内适当光滑闭曲面 S 所围成的域，u 是 V 上超双曲型方程(34)的正规解，则

$$\mathrm{Pf}\int_S\cdots\int\left[\frac{1}{\Gamma^{m-1}}\frac{du}{d\nu}-u\frac{d}{d\nu}\left(\frac{1}{\Gamma^{m-1}}\right)\right]dS=$$

$$=\begin{cases}0, & 若(x^0)在V外,\\ 2(1-m)\varepsilon_{2m}u(x^0), & 若(x^0)在V内。\end{cases}\qquad(36)$$

证： 当定点 (x^0) 在域 V 的外部，在基本公式(35)中，取 u 为(34)的正规解，v 取为基本解 Γ^{1-m}，则有

$$\mathrm{Pf}\int_S\cdots\int\left[\frac{1}{\Gamma^{m-1}}\frac{du}{d\nu}-u\frac{d}{d\nu}\left(\frac{1}{\Gamma^{m-1}}\right)\right]dS=0,$$

这里当Γ与特征角面相交时，上式保持，而当相交为空集时，上式左端为正常积分。

当(x^0)在域V的内部，由于特征角面$\Gamma=0$的顶点(x^0)为奇点，在引用基本公式(35)时，需挖去以(x^0)为心，s为半径的球$C_{x^0,s}$：

$$\sum_{i=1}^{m}(x_i-x_i^0)^2+\sum_{j=m+1}^{2m}(x_j-x_j^0)^2\leqslant s^2,$$

球的边界记为Σ，设域V挖去$C_{x^0,s}$后的域为V'，在V'上运用公式(35)，则有

$$0=\mathrm{Pf}\iint_{V'}\cdots\int\left[\frac{1}{\Gamma^{m-1}}\right]F(u)-uF\left(\frac{1}{\Gamma^{m-1}}\right)\Big]dV'=$$

$$=-\mathrm{Pf}\int_{S+\Sigma}\cdots\int\left(\frac{1}{\Gamma^{m-1}}\frac{du}{d\nu}-u\frac{d}{d\nu}\left(\frac{1}{\Gamma^{m-1}}\right)\right]dS,$$

即

$$\mathrm{Pf}\int_S\cdots\int\left[\frac{1}{\Gamma^{m-1}}\frac{du}{d\nu}-u\frac{d}{d\nu}\left(\frac{1}{\Gamma^{m-1}}\right)\right]dS+$$

$$+\mathrm{Pf}\int_\Sigma\cdots\int\left[\frac{1}{\Gamma^{m-1}}\frac{du}{d\nu}-u\frac{d}{d\nu}\left(\frac{1}{\Gamma^{m-1}}\right)\right]dS=0.\quad(37)$$

现在考查上式沿Σ的瑕积分有限部分当Σ趋于(x^0)的情况，首先考察

$$\mathrm{Pf}\int_\Sigma\cdots\int\frac{1}{\Gamma^{m-1}}\frac{du}{d\nu}dS,\qquad(37_1)$$

在Σ上，由于

$$\frac{du}{d\nu}=\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{dx_i}{d\nu}+\sum_{j=m+1}^{2m}\frac{\partial u}{\partial x_j}\frac{dx_j}{d\nu}=$$

$$=\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{1}{2}\frac{\partial\mathscr{A}}{\partial\pi_i}+\sum_{j=m+1}^{2m}\frac{\partial u}{\partial x_j}\cdot\frac{1}{2}\frac{\partial\mathscr{A}}{\partial\pi_j}=$$

$$=\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial u}{\partial x_i}\pi_i-\sum_{j=m+1}^{2m}\frac{\partial u}{\partial x_j}\pi_j,$$

$$\pi_k dS=\pm\frac{D(x_1,\cdots,x_{k-1},x_{k+1},\cdots x_{2m})}{D(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_{2m-1})},$$

右端为 $2m-1$ 阶函数行列式，$\lambda_i(i=1,2,\cdots,2m-1)$为 $2m$ 维空间 $2m-1$ 维超曲面$\sum$的参数，“－”相当于内法线方向，“＋“相当于外法线方向。

球面$\sum$上的点可视为由(x^0)引测地线与球面$\sum$的交点，测地线上的点(x)与定点(x^0)的测地距离用 s 表示，则

$$x_k=x_k^0+s\left(\frac{dx_k}{ds}\right)_{s=0}+o(s^2),$$

$$\frac{\partial x_k}{\partial\lambda_j}=s\frac{\partial}{\partial\lambda_j}\left(\frac{dx_k}{ds}\right)_{s=0}+o(s^2),$$

因之，(37_1)积分号下的分子是 s^{2m-1} 级无穷小，而分母

$$\Gamma^{m-1}=(s^2H(x_1',\cdots,x_{2m}'))^{m-1}$$

为 s^{2m-2} 级无穷小，其中

$$H(x_1',\cdots,x_{2m}')=\sum_{i,j=1}^{2m}H_{ij}(x_1',\cdots,x_{2m}')dx_i dx_j,$$

$$(H_{ij})=(A_{ij})^{-1},$$

(A_{ij})为方程(34)特征二次式的系数矩阵。故当$\sum$趋于(x^0)时，所考虑的瑕积分的有限部分(37_1)将趋于零，即

$$\mathrm{Pf}\int\cdots\int_{\Sigma}\frac{1}{\Gamma^{m-1}}\frac{du}{d\nu}dS\to 0.$$

再考查有限部分

$$\mathrm{Pf}\int_{\Sigma}\cdots\int u\frac{d}{d\nu}\left(\frac{1}{\Gamma^{m-1}}\right)dS,$$

由于在Σ上补法线方向$d\nu$与次特征方向ds一致，则有

$$\frac{d}{d\nu}\left(\frac{1}{\Gamma^{m-1}}\right)=(1-m)\frac{1}{\Gamma^m}\frac{d\Gamma}{d\nu}=(1-m)\frac{1}{\Gamma^m}\sum_{i=1}^{2m}2s\pi_i\frac{dx_i}{ds},$$

因之，

$$\mathrm{Pf}\int_{\Sigma}\cdots\int u\frac{d}{d\nu}\left(\frac{1}{\Gamma^{m-1}}\right)dS=$$

$$=(1-m)\,\mathrm{Pf}\int_{\Sigma}\cdots\int\frac{2su\sum_{i=1}^{2m}\pi_i\frac{dx_i}{ds}}{\Gamma^m}dS=$$

$$=(1-m)\,\mathrm{Pf}\int_{\Sigma}\cdots\int\frac{1}{\Gamma^m}\cdot 2su\frac{D(x_1,x_2,\cdots,x_{2m})}{D(s,\lambda_1,\cdots,\lambda_{2m-1})}$$

$$d\lambda_1\cdots d\lambda_{2m-1},$$

上式右端，以$u-u(x^0)+u(x^0)$代u，则$u-u(x^0)$项的系数，分子显然有s^{2m}阶无穷小，分母亦然，当Σ趋于(x^0)时，由于u的正规性，相应瑕积分的有限部分必趋于零。剩下的关于$u(x^0)$项的瑕积分有限部分为

$$2(1-m)u(x_0)\mathrm{Pf}\int_{\Sigma}\cdots\int\frac{1}{\Gamma^m}\cdot s\cdot\frac{D(x_1,x_2,\cdots,x_{2m})}{D(s,\lambda_1,\cdots,\lambda_{2m-1})}$$

$$d\lambda_1\cdots d\lambda_{2m-1},$$

当$\Sigma\to(x^0)$时，上式积分号下分子、分母既具有同级无穷小$o(s^{2m})$，相应的瑕积分有限部分趋于定限，设此定限以C_{2m}表示，故

$$\mathrm{Pf}\int\cdots\int_{\Sigma} u\frac{d}{d\nu}\left(\frac{1}{\Gamma^{m-1}}\right)dS=2(1-m)C_{2m}u(x^0),$$

故当$\sum$趋于(x^0)时，(37)变为

$$\mathrm{Pf}\int\cdots\int_{S}\left[\frac{1}{\Gamma^{m-1}}\frac{du}{d\nu}-u\frac{d}{d\nu}\frac{1}{\Gamma^{m-1}}\right]dS=2(1-m)C_{2m}u(x^0).$$

仿上述推理，自然有

性质 3 设V是R_{2m}内适当光滑闭曲面S所围成的域，u是V上的正规函数，则

$$\mathrm{Pf}\iint_{V}\cdots\int\frac{1}{\Gamma^{m-1}}F(u)dV+\mathrm{Pf}\int\cdots\int_{S}\left[\frac{1}{\Gamma^{m-1}}\frac{du}{d\nu}-u\frac{d}{d\nu}\frac{1}{\Gamma^{m-1}}\right]dS=$$

$$=\begin{cases}0, & \text{若}(x^0)\text{在}V\text{外},\\ 2(1-m)C_{2m}u(x^0), & \text{若}(x^0)\text{在}V\text{内}。\end{cases}\qquad(38)$$

3. 边值问题的显式解

关系式(36)或(38)表明超双曲型方程的解在R_{2m}空间闭超曲面所围成区域内一点的值，除需要u在曲面S上的值外，还需要其补法线微商在S上的值，但是否可任意再给$\frac{du}{d\nu}$在S上的值呢？这又不可能，因为超双曲型方程的边值问题的解是唯一的，这就需要定义新的函数以消去$\frac{du}{d\nu}$项，从而得到边值问题的显式解。

为了达到这个目的，从基本公式(35)出发，取u为(34)的解，取v为(34)的另一解U，则有

$$\mathrm{Pf}\int\cdots\int_{S}\left[U\frac{du}{d\nu}-u\frac{dU}{d\nu}\right]dS=0,\qquad(39)$$

这里有限部分符号可以取掉。由(36)的第二式与(39)得

$$\mathrm{Pf}\int_S\cdots\int\left[\left(\frac{1}{\Gamma^{m-1}}-U\right)\frac{du}{d\nu}-u\frac{d}{d\nu}\left(\frac{1}{\Gamma^{m-1}}-U\right)\right]dS=$$

$$=2(1-m)C_{2m}u(x^0).$$

定义 函数$G(x,x^0)=\dfrac{1}{2(1-m)C_{2m}}\left(\dfrac{1}{\Gamma^{m-1}}-U\right)$称为超双曲型方程(34)对域$V$的格林函数，它满足以下条件：

(1) 在S所范围的域内，除特征角面$\Gamma=0$外，满足超双曲型方程(34)；

(2) $\left(\dfrac{1}{\Gamma^{m-1}}-U\right)_S=0$；

(3) 函数$G(x,x^0)$具$\dfrac{1}{\Gamma^{m-1}}$的奇性。

这样，就得到边值问题的显式解为

$$u(x^0)=-\mathrm{Pf}\int_S\cdots\int u\frac{dG}{d\nu}dS.$$

4. 格林函数的性质

在区域V内的任意二点(a)，(b)，以此二点为定点的特征角面分别是$\Gamma(x,a)=0$与$\Gamma(x,b)=0$，以此二点为定点的格林函数分别是$G(x,a)$与$G(x,b)$。为避免奇点，从闭域V除去以(a)，(b)为心的小球，并命这些球面分别为Σ_a与Σ_b，剩下的部分为V'，在V'上引用基本公式，设基本公式中$u=G(x,a)$，$v=G(x,b)$，则有

$$\mathrm{Pf}\int_{S+\Sigma_a+\Sigma_b}\cdots\int\left[G(x,a)\frac{dG(x,b)}{d\nu}-G(x,b)\frac{dG(x,a)}{d\nu}\right]dS=0,$$

根据格林函数的定义，它在区域的边界S上为零，故有

$$\mathrm{Pf}\int_{\Sigma_a}\cdots\int\left[G(x,a)\frac{dG(x,b)}{d\nu}-G(x,b)\frac{dG(x,a)}{d\nu}\right]dS=$$

$$=-\mathrm{Pf}\int_{\Sigma_b}\cdots\int\left[G(x,a)\frac{dG(x,b)}{d\nu}-\right.$$

$$\left.-G(x,b)\frac{dG(x,a)}{d\nu}\right]dS. \qquad (40)$$

考查(40)的左端，由于沿 Σ_a 的积分 $G(x,b)$无奇性，则有

$$\frac{dG(x,b)}{d\nu}=\sum_{k=1}^{2m}\frac{\partial G}{\partial x_k}\frac{dx_K}{d\nu}=\sum_{k=1}^{2m}\frac{\partial G}{\partial x_k}\cdot\frac{1}{2}\frac{\partial\mathscr{A}}{\partial\pi_k}=$$

$$=\sum_{k=1}^{2m}\frac{\partial G}{\partial x_k}\pi_k,$$

仿性质 2 的分析，(40) 式左端第一项瑕积分有限部分，当 Σ_a 趋于(a)时应趋于零，而第二项中含$\frac{dU}{d\nu}$项同上理应趋于零，剩下的部分

$$-\frac{1}{2(1-m)C_{2m}}\mathrm{Pf}\int_{\Sigma_a}\cdots\int G(x,b)\frac{d}{d\nu}\frac{1}{\Gamma^{m-1}(x,\ a)}dS \qquad (41)$$

其中

$$\frac{d}{d\nu}\frac{1}{\Gamma^{m-1}}=-(1-m)\ \Gamma^{-m}\frac{d\Gamma}{d\nu}=$$

$$=-(1-m)\ \Gamma^{-m}\sum_{k=1}^{2m}\frac{\partial\Gamma}{\partial x_k}\frac{dx_k}{ds}=$$

$$=-2(1-m)\ \Gamma^{-m}\sum_{k=1}^{2m}s\pi_k\frac{dx_k}{ds},$$

故(41)式等于

$$\frac{1}{C_{2m}}\text{Pf}\int_{\Sigma_a}\cdots\int\frac{1}{\Gamma^m(x,a)}sG(x,b)\frac{D(x_1,x_2,\cdots,x_{2m})}{D(s,\lambda_1,\cdots,\lambda_{2m-1})}d\lambda_1\cdots$$

$d\lambda_{2m-1}$。上式当 Σ_a 趋于(a)时，瑕积分有限部分号下分子分母有同级无穷小 $o(s^{2m})$，而

$$\text{Pf}\int_{\Sigma_a}\cdots\int\frac{1}{\Gamma^m(x,a)}\cdot s\cdot\frac{D(x_1\cdots,x_{2m})}{D(s,\lambda_1,\cdots,\lambda_{2m-1})}d\lambda_1\cdots d\lambda_{2m-1},$$

当 Σ_a 趋于(a)时的极限为 C_{2m}，故最后得(40)式左端当Σ_a 趋于(a)时，其极限为$G(a,b)$。

同样讨论(40)式右端的极限为$G(b,a)$。故有

性质　超双曲型方程(34)对域V的格林函数具有对称性质如下：

$$G(a,b)=G(b,a).$$

这个性质在讨论超双曲型方程境界值问题的综合工作中将会有用。

§7　关于在低维流形上给数据的问题

1．问题　设

$$\Delta_{t,p}=\frac{\partial^2}{\partial t_1^2}+\cdots+\frac{\partial^2}{\partial t_p^2},\qquad p>1,$$

$$\Delta_{x,q}=\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}+\cdots+\frac{\partial^2}{\partial x_q^2},\qquad q>1,$$

这里 t，x 为实变元。命 $u(x,t)=u(x_1,\cdots,x_q,t_1,\cdots,t_p)$ 若 $f(x)$是阿达玛意义下 $x=(x_1,\cdots,x_q)$的正规函数则问题

$$\begin{cases}\Delta_{t,p}u=\Delta_{x,q}u,\\ u(x,0)=f(x)\end{cases}\tag{42}$$

是正确的。

若考查问题对空间 t 为球对称的解 $u(x,t)$ 是 $x_1,\cdots,x_q$ 与 $\rho=|t|=\sqrt{t_1^2+\cdots+t_p^2}$ 的函数，则问题

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 u}{\partial \rho^2}+\dfrac{p-1}{\rho}\dfrac{\partial u}{\partial \rho}=\Delta_{x,q}u,\\ u(x,0)=f(x),\\ \dfrac{\partial u}{\partial \rho}(x,0)=0.\end{cases} \tag{43}$$

的解 $u(x,t)$ 必满足(42)，函数 $u(x,t)$ 对 $\rho>0$ 两次连续可微，而对 $\rho\geqslant 0$ 连续可微。

问题(43)是奇型柯西问题。

2． **奇型柯西问题(43)的解**

记 $u=u^k(x,t)$，首先有如下循环公式，

$$\begin{aligned}&\frac{\partial u^k}{\partial t}(x,t)=tu^{k+2}(x,t),\\ &u^k(x,t)=t^{1-k}u^{2-k}(x,t).\end{aligned} \tag{44}$$

上述公式表明：我们可以由(43)的一个解 $u^k(x,t)$ 得到同一方程具有参数 $k+2$ 与 $k-2$ 的解。这里仅指出对单变量 t 的函数 v 和 w，上述公式是正确的。事实上，命

$$w=t^{k-1}v,$$

则

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}+\frac{2-k}{t}\frac{\partial w}{\partial t}=t^{k-1}\left(\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}+\frac{k}{t}\frac{\partial v}{\partial t}\right).$$

若命

$$tw=\frac{\partial v}{\partial t},$$

我们得到：

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}+\frac{k+2}{t}\ \frac{\partial w}{\partial t}=\frac{1}{t}\ \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}+\frac{k}{t}\ \frac{\partial v}{\partial t}\right),$$

要解(43)，就参数 k 可分几种情形：

情形Ⅰ $k=p-1=q-1$.

在本章§1曾遇到过这种情形。(43)的解由下式给出

$$u(x,\rho)=\frac{1}{\omega_q}\int\cdots\int_{\Omega_q} f(x_1+\alpha_1\rho,\cdots,x_q+\alpha_q\rho)d\omega_q,$$

$$\omega_q=\frac{2(\sqrt{\pi})^q}{\Gamma\left(\frac{q}{2}\right)}。$$

情形Ⅱ 当 $k=p-1>q-1$，即 $p>q$。

虚拟变元至 x_{k+1} 个，这时

$$\Delta_{x,q}u=\Delta_{x,k+1}u=\frac{\partial^2 u}{\partial\rho^2}+\frac{k}{\rho}\ \frac{\partial u}{\partial\rho},$$

运用降维法可得

$$u(x,\rho)=\frac{\omega_{k+1-q}}{\omega_{k+1}}\int\cdots\int_{\sum_{i=1}^{q}\alpha_i^2\leqslant 1} f(x+\alpha\rho)\left(1-\sum_{i=1}^{q}\alpha_i^2\right)^{\frac{p-q}{2}-1}d\alpha_1\cdots d\alpha_q$$

$$=\frac{\omega_{k+1-q}}{\omega_{k+1}}\rho^{2-p}\int\cdots\int_{|x-y|\leqslant t} f(y)\left(|t|^2-r_{xy}^2\right)^{\frac{p-q}{2}-1}dy_1\cdots dy_q$$

这里

$$r_{xy}^2=\sum_{i=1}^{q}(x_i-y_i)^2.$$

情形Ⅲ 当 $k<q-1$ 时，即 $p<q$.

这时，总可选正整数 n 使得

$$k+2n\geqslant q-1,$$

而归结成上两种情形。事实上，通过公式

$$u^k=\left(\frac{\partial}{\rho\partial\rho}\right)u^{k-2},$$

$$u^k=\rho^{1-k}u^{2-k},$$

得

$$u^k=\rho^{1-k}u^{2-k}=\rho^{1-k}\left(\frac{\partial}{\rho\,\partial\,\rho}\right)u^{-k}=\rho^{1-k}\left(\frac{\partial}{\rho\,\partial\,\rho}\right)\left(\frac{\partial}{\rho\,\partial\,\rho}\right)u^{-k-2}=$$

$$=\cdots=\rho^{1-k}\left(\frac{\partial}{\rho\,\partial\,\rho}\right)^n\rho^{k+2n-1}u^{k+2n},$$

而 u^{k+2n} 为下列问题的解：

$$\begin{cases}\Delta_{x,q}u=\dfrac{\partial^2 u}{\partial\rho^2}+\dfrac{k+2n}{\rho}\dfrac{\partial u}{\partial\rho},\\ u(x,0)=\dfrac{f(x)}{(k+1)(k+3)\cdots(k+2n-1)},\\ \dfrac{\partial u}{\partial\rho}(x,0)=0,\end{cases}$$

$k\neq-1,-3,-5,\cdots$.

弗劳伦兹贝罗对(42)得到如下一般结论（C. R. Acad. Sci. Paris 248. 1959, 1469-1470)：

若$\dfrac{p-q}{2}-1$ 不是负整数，有

$$Au(x,t)=t^{2-p}\mathrm{Pf}\int_{|x-y|\leqslant t}f(y)(|t|^2-r_{xy})^{\frac{p-q}{2}-1}dy,$$

若$\dfrac{p-q}{2}-1$ 是负整数，有

$$Bu(x,t)=t^{2-p}\mathrm{Pf}\int_{|x-y|\leqslant|t|}f(y)(|t|-r_{xy})^{\frac{p-q}{2}-1}dy,$$

积分符号为多重积分的缩写。

§ 8 边值问题的解析解

1. 问题概述

设定义在区域$\{x_1^2+x_2^2\leqslant 1,\ y_1^{*2}+y_2^{*2}=1\}$的函数$u(x_1, x_2, y_1^*, y_2^*)$构成类$\mathscr{U}(X,Y^*)$,定义在区域$\{x_1^{*2}+x_2^{*2}=1, y_1^2+y_2^2\leqslant 1\}$的函数$u(x_1^*,x_2^*,y_1,y_2)$构成类$\mathscr{B}(X^*,Y)$，我们把类$\mathscr{U}(X,Y^*)$中的函数$u(x_1,x_2,y_1^*,y_2^*)$或者类$\mathscr{B}(X^*,Y)$中的函数$u(x_1^*,x_2^*,y_1,y_2)$称为解析容许边值函数。定义在区域$\{x_1^2+x_2^2\leqslant 1,\ y_1^2+y_2^2\leqslant 1\}$的函数$u(x_1, x_2, y_1, y_2)$构成类$\mathscr{F}(X,Y)$，类$\mathscr{F}(X,Y)$中的函数，称为解析容许函数。

下面讨论：存在一个解析容许函数$u(x_1,x_2,y_1,y_2)$，它在区域$\{x_1^2+x_2^2\leqslant 1,\ y_1^2+y_2^2\leqslant 1\}$上是超双曲型方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial y_1^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y_2^2} \tag{E}$$

的解，并满足以下边值条件

$$u(x_1^*,x_2^*,y_1,y_2)=f(x_1^*,x_2^*,y_1,y_2) \tag{B.V}$$

条件(B.V)定义在区域$\{x_1^{*2}+x_2^{*2}=1,\ y_1^2+y_2^2\leqslant 1\}$，函数$f(x_1^*,x_2^*,y_1,y_2)$属于$\mathscr{B}(X^*,Y)$的某确定子类。

此外，讨论了解$u(x_1, x_2, y_1, y_2)$对于解析容许函数是唯一的。

2. 记号

$x=(x_1,x_2)$和$p=(p_1,p_2)$表示二维笛卡尔X空间的点，$y=(y_1,y_2)$和$q=(q_1, q_2)$表示二维笛卡尔Y空间的点。在这两空间的欧氏距离，用下面符号表示：

$$|px|=[(p_1-x_1)^2+(p_2-x_2)^2]^{\frac{1}{2}},\quad |x|=(x_1^2+x_2^2)^{\frac{1}{2}},$$

$$|qy|=[(q_1-y_1)^2+(q_2-y_2)^2]^{\frac{1}{2}},\quad |y|=(y_1^2+y_2^2)^{\frac{1}{2}},$$

我们并约定$x^2=x_1^2+x_2^2$，$y^2=y_1^2+y_2^2$. 带有星号的字母表示距原点为单位距离的点，例如x^*表示在X空间使$|x^*|=1$的点。单位园$|x|\leqslant1(|y|\leqslant1)$用$C(X)(C(Y))$来表示，它的边界$|x^*|=1(|y^*|=1)$用$C^*(X)$ $(C^*(Y))$表示。对二维拉普拉斯算子在$C(X)$ $(C(Y))$上的格林函数用$K(p,x)$ $(K(q,y))$表示，通常的函数$u(x,y)=u(x_1,x_2,y_1,y_2)$，$u(x^*,y)=u(x_1^*,x_2^*,y_1,y_2)$等。$u\in\mathscr{F}(X,Y)$表示$u$属于类$\mathscr{F}(X,Y)$.

二维拉普拉斯算子表示为

$$\Delta_x=\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2}{\partial x_2^2},\qquad \Delta_y=\frac{\partial^2}{\partial y_1^2}+\frac{\partial^2}{\partial y_2^2},$$

用

$$\Delta_x^0=1,\ \Delta_x^1=\Delta_x,\ \Delta_x^n=\Delta_x\Delta_x^{n-1},$$
$$\Delta_y^0=1,\ \Delta_y^1=\Delta_y,\ \Delta_y^n=\Delta_y\Delta_y^{n-1},$$

定义重叠算子，这里n是非负整数。

类$\mathscr{U}(X,Y^*)$的函数。

设$u(x,y^*)$定义在拓扑乘积区域$C(X)\times C^*(Y)$.

定义 1　$u(x,y^*)\in\mathscr{U}(X,Y^*)$当且仅当

(1) $\Delta_x^n u(x,y^*)$和它对$x=(x_1,x_2)$的偏微商在区域$C(X)\times C^*(Y)$上连续，这里$n=0,1,2,\cdots$.

(2) 对(x,y^*)一致的有$|\Delta_x^n u(x,y^*)|\leqslant4^n\tau(n)$，其中$\tau(n)$当$n$趋于无穷时趋于零。

仿定义1，可定义$u(x^*,y)\in\mathscr{B}(X^*,Y)$，这里$u(x^*,y)$是以拓扑乘积$C^*(X)\times C(Y)$为定义域。

$n(n=0,1,2,\cdots)$次折叠波阿松积分算子由下式表示：

$\theta_0(x)=1$，恒等算子，

$$\theta_n(x)=\int\limits_{|r_1|<1} dr_1 K(r_1,x)\cdots \int\limits_{|r_n|<1} dr_n K(r_n,r_{n-1})\quad (n=1,2,\cdots) \tag{45}$$

这里

$$r_k=(r_{k1},r_{k2}),\quad \int\limits_{|r_k|<1} dr_k=\iint\limits_{r_k<1} dr_{k1}dr_{k2}.$$

定义

$$G_n(x,y^*)=G_n(x,y^*;\Delta_x^n u)= =\frac{1}{\pi}\oint\frac{\Delta_x^n u(p^*,y^*)(1-x^2)}{|p^*x|}dp^*, \tag{46}$$

其中

$$p^*=(\cos\theta,\sin\theta),\quad \oint dp^*=\int_0^{2\pi}d\theta.$$

3. 几个引理

引理 1 若 $u(x,y^*)\in\mathscr{U}(X,Y^*)$，则

$$u(x,y^*)=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\theta_k(x)G_k(r_k,y^*),$$

证 易知

$$u(x,y^*)=\frac{1}{\pi}\oint\frac{u(p^*,y^*)(1-x^2)}{|p^*x|}dp^*- -\int\limits_{|r_1|<1} K(r_1,x)\Delta_x u(r_1,y^*)dr_1, \tag{47}$$

由(45)与(46)，则(47)写成

$$u(x,y^*)=G_0(r_0,y^*)-\theta_1(x)\Delta_x u(r_1,y^*),\quad (r_0=x) \tag{48}$$

于(48)中用$\Delta_x u$代u并计算在(r_1,y^*)的值，而后将对$\Delta_x(r_1,y^*)$所得结果代入(48)，则

$$u(x,y^*)=G_0(r_0,y^*)-$$
$$-\theta_1(x)G_1(r_1,y^*)+\theta_2\Delta_x^2 u(r_2,y^*)$$

对上式重复叠代$(n-1)$次，我们有

$$u(x,y^*)=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\theta_k(x)G_k(r_k,y^*)+$$
$$+(-1)^{n+1}\theta_{n+1}(x)\Delta_x^{n+1}u(r_{n+1},y^*).$$

因为

$$\int\limits_{|r_n|<1}K(r_n,r_{n-1})dr_n=\frac{(1-r_{n-1}^2)}{4}\leqslant\frac{1}{4},$$

$$|\theta_{n+1}(x)\Delta_x^{n+1}u(r_{n+1},y^*)|\leqslant \tag{49}$$
$$\leqslant\frac{\mathrm{Max}\,|\Delta_x^{n+1}u|}{4^{n+1}}\leqslant\tau(n+1),$$

由(49)立刻推出引理的结论。

引理1的逆定理为

引理2 设$f_k(x^*,y^*)$ $(k=0,1,2,\cdots)$对$C^*(X)\times C^*(Y)$上的(x^*,y^*)是连续的，并且使

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\mathrm{Max}\,|f_k(x^*,y^*)|}{4^k}<\infty,$$

那末，若$\overline{G}_k(r_k,y^*)=G_k(r_k,y^*;f_k)$，则函数

$$u(x,y^*)=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\theta_k(x)\overline{G}_k(r_k,y^*),$$
$$(r_0=x)$$

属于类$\mathscr{U}(X,Y^*)$。即$u(x,y^*)$是在$C(X)\times C^*(Y)$上的解析容许函数。

证：$\Delta^0 u=u$表示在$C(X)\times C^*(Y)$上(x,y^*)的连续函

数，而且$\Delta^0 u$关于$x=(x_1,x_2)$具一阶连续偏微商，因为

$$u(x,y^*)=\overline{G}_0(r_0,y^*)-\theta_1(x)v(r_1,y^*),$$

这里

$$v(x,y^*)=\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\theta_{k-1}(x)\overline{G}_k(r_{k-1},y^*)$$

是在$C(X)\times C^*(Y)$对(x, y^*)连续。用同样的方法证明$v(x,y^*)$在$C(X)\times C^*(Y)$上对$x=(x_1,x_2)$具一阶连续偏微商，即在$C(X)\times C^*(Y)$上有$\Delta_x^1 u(x,y^*)=v(x,y^*)$. 因此

$$\Delta_x u(x,y^*)=\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\theta_{k-1}(x)\overline{G}_k(r_{k-1},y^*).$$

由上式得

$$\Delta_x u(x^*,y^*)=f_1(x^*,y^*)$$

与

$$\frac{|\Delta_x u(x,y^*)|}{4}\leqslant\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\mathrm{Max}|f_k|}{4^k}.$$

一般，用上理可得公式如下：

$$\Delta_x^n u(x^*,y^*)=f_n(x^*,y^*)$$

与

$$\frac{|\Delta_x^n u(x,y^*)|}{4^n}\leqslant\sum_{k=n}^{\infty}\frac{\mathrm{Max}|f_k|}{4^k}.$$

由假设与上估计式看出：当n趋于无穷时$4^{-n}\Delta_x^n u(x,y^*)$对$(x,y^*)$一致趋于零。这一事实就完成了引理2的证明。

类$\mathscr{F}(X,Y)$的函数

定义 2 $u(x,y)$属于$\mathscr{F}(X,Y)$当且仅当

(1) $\Delta_x^n\Delta_y^m u(x, y)$ $(n,m=0,1,2,\cdots)$及其一阶偏微商在$C(X)\times C(Y)$上连续。

(2) $|\Delta_x^n\Delta_y^m u(x,y)|\leqslant 4^{n+m}\tau(n,m)$对$(x,y)$一致成立，这

里 $\tau(n,m)$ 当 $(n,m)\to(\infty,\infty)$ 时趋于零。

n 次叠代重波阿松积分算子表示为：

$\Omega_0=\theta_0(x)\theta_0(y)=1$，恒等算子

$$\Omega_n=\theta_n(x)\theta_n(y)=\iint\limits_{|p_1|<1\ |q_1|<1} dp_1 dq_1 K(p_1,x)K(q_1,y)\cdots$$

$$\iint\limits_{|p_n|<1\ |q_n|<1} dp_n dq_n K(p_n,x)K(q_n,y),$$

$$(n=1,2,\cdots)$$

这里 $p_k=(p_{k1},p_{k2})$，$q_k=(q_{k1},q_{k2})$，$(k=1,\cdots,n)$. 定义

$$H_n(x,y)=H_n(x,y;\Delta_y^n\Delta_x^n u,\Delta_y^{n+1}\Delta_x^n u,\Delta_y^n\Delta_x^{n+1}u)=$$

$$=\frac{1}{\pi^2}\oint\oint\frac{\Delta_y^n\Delta_x^n u(p^*,q^*)(1-x^2)(1-y^2)}{|p^*x||q^*y|}dp^*dq^*-$$

$$-\frac{1}{\pi}\int\limits_{|q|<1} dqK(q,y)\oint\frac{\Delta_y^{n+1}\Delta_x^n u(p^*,q)(1-x^2)}{|p^*x|}dp^*-$$

$$-\frac{1}{\pi}\int\limits_{|p|<1} dpK(p,x)\oint\frac{\Delta_y^n\Delta_x^{n+1}u(p,q^*)(1-y^2)}{|q^*y|}dq^*$$

$$(n=0,1,2,\cdots).\tag{50}$$

我们将证明：若 $u(x,y)\in\mathscr{F}(X,Y)$，则 $u(x,y)$ 被 $(\Delta_y^n\Delta_x^n u(x^*,y^*),\ \Delta_y^{n+1}\Delta_x^n u(x^*,y),\ \Delta_y^n\Delta_x^{n+1}u(x,y^*)),n=0,1,\cdots$ 完全确定。

引理 3 若 $u(x,y)\in\mathscr{F}(X,Y)$，则

$$u(x,y)=\sum_{k=0}^{\infty}\Omega_k H_k(p_k,q_k).$$

证：由波阿松积分的性质

$$u(x,y)=\frac{1}{\pi}\oint\frac{u(p^*,y)(1-x^2)}{|p^*x|}dp^*-$$

$$-\int_{p<1}K(p,x)\Delta_x u(p,y)dp=$$

$$=\frac{1}{\pi}\oint\frac{dp^*(1-x^2)}{|p^*x|}\Big[\frac{1}{\pi}\oint\frac{u(p^*,q^*)(1-y^2)}{|q^*y|}dq^*-$$

$$-\int_{q<1}K(q,y)\Delta_y u(p^*,q)dq\Big]-$$

$$-\int_{p<1}dpK(p,x)\Big[\frac{1}{\pi}\oint\frac{\Delta_x u(p,q^*)(1-y^2)}{|q^*y|}dq^*-$$

$$-\int_{q<1}K(q,y)\Delta_y\Delta_x u(p,q)dq\Big].$$

(51)

由 n 次叠代重波阿松积分算子与(50)，可将(51)写成

$$u(x,y)=H(p_0,q_0)+\Omega_1\Delta_y\Delta_x u(p_1,q_1)$$

$$((p_0,q_0)=(x,y)).$$

上式中以 $\Delta_y\Delta_x u(x,y)$ 代 u，计算在 (p_1,q_1) 的值，并将对 $\Delta_y\Delta_x u(p_1,q_1)$ 的结果代入上式，有

$$u(x,y)=H_0(p_0,q_0)+\Omega_1 H(p_1,q_1)+\Omega_2\Delta_y^2\Delta_x^2 u(p_2,q_2),$$

重复叠代$(n-1)$次，我们得到

$$u(x,y)=\sum_{k=0}^{n}\Omega_k H_k(p_k,q_k)+\Omega_{n+1}\Delta_y^{n+1}\Delta_x^{n+1}u(p_{n+1},q_{n+1}).$$

(52)

由(49)与定义 2，有

$$|\Omega_{n+1}\Delta_y^{n+1}\Delta_x^{n+1}u|\leqslant\frac{\mathrm{Max}|\Delta_y^{n+1}\Delta_x^{n+1}u|}{4^{2n+2}}\leqslant\tau(n+1,n+1),\ (53)$$

由(52)与(53)，引理得证。

下面考虑引理 3 的逆定理。

引理 4 命 $\Delta_x^k u(x^*,y)=g_k(x^*,y)$，$\Delta_y^k u(x,y^*)=h_k(x,y^*)$ $(k=0,1,2,\cdots)$，设

(1) $h_k(x,y^*)\in\mathscr{U}(X,Y^*)$，$g_k(x^*,y)\in\mathscr{B}(X^*,Y)$，

(2) $\Delta_x^k h_k(x^*,y^*)=\Delta_y^k g_k(x^*,y^*)=f_k(x^*,y^*)$，

(3) 对无关于(n,k,x,y,x^*,y^*)的常数C，

$$|\Delta_y^n g_k(x^*,y)|+|\Delta_x^n h_k(x,y^*)|\leqslant 4^n C,$$

若 $\overline{H}_k(p_k,q_k)=H_k(p_k,q_k;f_k,\Delta_y^{k+1}g_k,\Delta_x^{k+1}h_k)$，则

$$u(x,y)=\sum_{k=0}^{\infty}\Omega_k\overline{H}_k(p_k,q_k)\in\mathscr{F}(X,Y)。$$

证 因为$\mathscr{F}(X,Y)$是函数的线性类，

$$\overline{H}_k(p_k,q_k)=\overline{H}_{k1}(p_k,q_k)+\overline{H}_{k2}(p_k,q_k),$$

这里

$$\overline{H}_{k1}(p_k,q_k)=H_k(p_k,q_k;f_k,0,0),$$
$$\overline{H}_{k2}(p_k,q_k)=H_k(p_k,q_k;0,\Delta_y^{k+1}g_k,0),$$

且

$$\overline{H}_{k3}(p_k,q_k)=H_k(p_k,q_k;0,0,\Delta_x^{k+1}h_k),$$

于是，若我们证明

$$u_i(x,y)=\sum_{k=0}^{\infty}\Omega_k\overline{H}_{ki}(p_k,q_k)\in\mathscr{F}(X,Y),\ i=1,2,3.$$

引理将被建立。

现证明$u_i(x,y)$满足定义 2 的性质(1). $u_i(x,y)$ 的级数为绝对收敛，因为它被下列级数所控制：

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{4\mathrm{Max}|f_k|+\mathrm{Max}|\Delta_y^{k+1}g_k|+\mathrm{Max}|\Delta_x^{k+1}h_k|}{4^{2k+1}}\leqslant c\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{4^k}.$$

如同引理 2 一样，$u_i(x,y)$ 必须满足定义 2 的性质 2 。我们

考虑

$$u_1(x,y)=\sum_{k=0}^{\infty}\theta_k(x)\theta_k(y)\bar{H}_{k1}(p_k,q_k), \qquad (54)$$

这里

$$\bar{H}_{k1}(p_k,q_k)=\frac{1}{\pi^2}\oint\oint\frac{f_k(p_k,q_k)(1-p_k^2)(1-q_k^2)}{|p^*p_k||q^*q_k|}dp^*dq^*,$$

由(54)推出

$$\Delta_x^n\Delta_y^m u_1(x,y)=\sum_{k=\mathrm{Min}(n,m)}^{\infty}\frac{\mathrm{Max}|f_k|}{4^{k-n}4^{k-m}}=$$

$$=4^{n+m}\sum_{k=\mathrm{Min}(n,m)}^{\infty}\frac{c}{4^k}.$$

现考虑第二个函数

$$u_2(x,y)=\sum_{k=0}^{\infty}\theta_k(x)\theta_k(y)\bar{H}_{k2}(p_k,q_k), \qquad (55)$$

其中

$$\bar{H}_{k2}(p_k,q_k)=\frac{1}{\pi}\int_{q<1}dqK(q,q_k)$$

$$\oint\frac{\Delta_y^{k+1}g_k(p^*,q)(1-p_k^2)}{|p^*p_k|}dp^*,$$

由(55)有

$$\Delta_x^n u_2(x,y)=\sum_{k=n}^{\infty}\theta_{k-n}(x)\theta_k(y)\bar{H}_{k2}(p_{k-n},q_k)=$$

$$=\sum_{k=n}^{m-1}\theta_{k-n}(x)\theta_k(y)\bar{H}_{k2}(p_{k-n},q_k)+$$

$$+\sum_{k=m}^{\infty}\theta_{k-n}(x)\theta_k(y)\bar{H}_{k2}(p_{k-n},q_k),$$

由此推出

$$\Delta_x^n \Delta_y^m u_2(x,y)=$$

$$=\sum_{k=n}^{m-1}\theta_{k-n}(x)\ \frac{1}{\pi}\oint\frac{\Delta_y^m g_k(p^*,y)(1-p_{k-n}^2)}{|p^* p_{k-n}|}dp^*+$$

$$+\sum_{k=m}^{\infty}\theta_{k-n}(x)\theta_{k-m}(y)\overline{H}_{k2}(p_{k-n},q_{k-m}).$$

由上式有

$$|\Delta_x^n \Delta_y^m u_2(x,y)|\leqslant 4^{n+m}\sum_{k=n}^{m-1}\frac{\mathrm{Max}|\Delta_y^m g_k(x^*,y)|}{4^k\cdot 4^m}+$$

$$+4^{n+m}\sum_{k=m}^{\infty}\frac{\mathrm{Max}|\Delta_y^{k+1}g_k(x^*,y)|}{4^k\cdot 4^{k+1}}.$$

于是，由上式及引理 4 的条件(3)，有

$$\frac{|\Delta_x^n \Delta_y^m u_2(x,y)|}{4^{n+m}}\leqslant\sum_{k=n}^{m-1}\frac{c}{4^k}+\sum_{k=m}^{\infty}\frac{c}{4^k}=c\sum_{k=n}^{\infty}\frac{1}{4^k},$$

这就证明了$u_2(x,y)\in\mathscr{F}(X,Y)$。类似可证$u_3(x,y)\in\mathscr{F}(X,Y)$，引理 4 的证明至此完成。

4. 唯一性与存在性定理

我们将考虑函数 $u(x,y)\in\mathscr{F}(X,Y)$，它是方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial y_1}+\frac{\partial^2 u}{\partial y_2^2}\quad(\Delta_x u=\Delta_y u),$$

在区域 $C(X)\times C(Y)$的解。

定理 1 若$u(x,y)\in\mathscr{F}(X,Y)$，$u(x^*,y)\equiv 0$，并且在$C(X)\times C(Y)$上 $\Delta_x u=\Delta_y u$，则 $u(x,y)\equiv 0$。

证：由假设有

$$\Delta_y^n\Delta_x^n u(x^*,y^*)=0,\ \ \Delta_y^{n+1}\Delta_x^n u(x^*,y)=0,\tag{56}$$

与

$$\Delta_y^m\Delta_x^n u(x^*,y^*)=0\quad(n,m=0,1,2,\cdots)\tag{57}$$

而且，因为 $\Delta_y^m u(x,y^*)\in\mathscr{U}(X,Y^*)$，引理 1 和(56)有

$$\Delta_y^m u(x,y^*)=0, \tag{57₁}$$

方程(56)，(57)与(57_1)，连系到引理 3 的级数表示，即可证明在 $C(X)\times C(Y)$ 上 $u(x,y)\equiv 0$。

定理 2 设 $g(x^*,y)\in\mathscr{B}(X^*,Y)$，这里 $|\Delta_y^n g(x^*,y)|\leqslant c$，$c$ 是与 (n,x^*,y) 无关的常数，命 $f_n(x^*,y^*)\equiv\Delta_y^{2n}g(x^*,y^*)$，$g_n(x^*,y)\equiv\Delta_y^n(x^*,y)$。定义

$$\begin{aligned}h_n(x,y^*)&=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\theta_k(x)G_k(r_k,y^*;\Delta_y^{n+k}g),\\ u(x,y)&=\sum_{n=0}^{\infty}\Omega_n H_n(p_n,q_n;f_n,\Delta_y^{n+1}g_n,\Delta_x^{n+1}h_n),\end{aligned}\tag{58}$$

则 $u(x,y)$ 有性质：$u(x^*,y)=g(x^*,y)$，$u(x,y^*)=h_0(x,y^*)\in\mathscr{U}(X,Y^*)$，$u(x,y)\in\mathscr{F}(X,Y)$，且在 $C(X)\times C(Y)$ 上 $\Delta_x u(x,y)=\Delta_y u(u,y)$.

证 由(58)第二式看出

$$\begin{aligned}u(x^*,y)&=H_0(x^*,y;f_0,\Delta_y g_0,\Delta_x h_0)=\\&=\frac{1}{\pi}\oint\frac{g(x^*,q^*)(1-y^2)}{|q^*y|}dq^*-\\&-\int_{|q_1|<1}K(q_1,y)\Delta_y g(x^*,q_1)dq_1=g(x^*,y),\end{aligned}$$

同样证明 $u(x,y^*)=h_0(x,y^*)\in\mathscr{U}(X,Y^*)$.

若对函数 $f_n(x^*,y^*)$，$g_n(x^*,y)$，$h_n(x,y^*)$ $(n=0,1,2,\cdots)$ 引理 4 的三个条件成立，那末 $u(x,y)\in\mathscr{F}(X,Y)$。

因为 $g_n(x^*,y)\in\mathscr{B}(x^*,y)$，$g(x^*,y)\in\mathscr{B}(X^*,Y)$，$h_n(x,y^*)\in\mathscr{U}(X,Y^*)$，

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{|\Delta_y^{n+k}g(x^*,y^*)|}{4^k}<c\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{4^k}<\infty, \tag{59}$$

故条件(1)成立。(59)即引理 2 中的不等式。

因为 $f_n(x^*,y^*)=\Delta_y^n g(x^*,y^*)=\Delta_x^n h_n(x^*,y^*)=\Delta_y^{2n} g(x^*,y^*)$，故条件(2)亦成立。

因为 $|\Delta_y^n g_k(x^*,y)|\leqslant c\leqslant 4^n c$，$|\Delta_x^n h_k(x,y^*)|\leqslant 4^n d$，这里适当地选取与$(n,k,x,y,x^*,y^*)$无关的常数 d，故条件(3)成立。

要完成定理 2 的证明，必须证明在 $C(X)\times C(Y)$ 上函数 $u(x,y)$ 满足 $\Delta_x u(x,y)=\Delta_y u(x,y)$。为此目的，我们考虑函数 $v(x,y)\equiv\Delta_x u(x,y)-\Delta_y u(x,y)\in\mathscr{F}(X,Y)$. 若

$$\begin{aligned}&\Delta_y^m\Delta_x^m v(x^*,y^*)=0,\ \Delta_y^{m+1}\Delta_x^m v(x^*,y)=0,\\&\Delta_y^m\Delta_x^{m+1}v(x,y^*)=0,\end{aligned}\qquad (*)$$

由引理 3 就推出 $v(x,y)\equiv 0$.

利用 $H_n(x,y)$ 与 $u(x,y)$（即(50)与(58)第二式）得

$$\begin{aligned}v(x,y)=&\Delta_x H_0(p_0,q_0)-\Delta_y H_0(p_0,q_0)-\\&-\sum_{n=1}^{\infty}\Omega_{n-1}\int_{|q_n|<1}K(q_n,q_{n-1})H_n(p_{n-1},q_n)dq_n+\\&+\sum_{n=1}^{\infty}\Omega_{n-1}\int_{|p_n|<1}K(p_n,p_{n-1})H_n(p_n,q_{n-1})dp_n,\end{aligned}\qquad (60)$$

$$((p_0,q_0)=(x,y)).$$

公式(60)是下面方程当 $m=1$ 时的特殊情况：

$$\begin{aligned}\Delta_y^{m-1}\Delta_x^{m-1}v(x,y)=&\Delta_x H_{m-1}(p_0,q_0)-\Delta_y H_{m-1}(p_0,q_0)-\\&-\sum_{n=m}^{\infty}\Omega_{n-m}\int_{|q_{n-m+1}|<1}K(q_{n-m+1},q_{n-m})\\&\qquad H_n(p_{n-m},q_{n-m+1})dq_{n-m+1}+\\&+\sum_{n=m}^{\infty}\Omega_{n-m}\int_{|p_{n-m+1}|<1}K(p_{n-m+1},p_{n-m})\\&\qquad H_n(p_{n-m+1},q_{n-m})dp_{n-m+1}.\end{aligned}\qquad (\bar{*})$$

若上式当m时为真，可导出

$$\Delta_y^m \Delta_x^{m-1} v(x,y)=\sum_{n=m}^{\infty} \Omega_{n-m} H_n(p_{n-m}, q_{n-m})-$$

$$-\sum_{n=m+1}^{\infty} \Omega_{n-m-1} \int_{|p_{n-m}|<1} dp_{n-m} K(p_{n-m}, p_{n-m-1}) \cdot$$

$$\cdot \int_{|p_{n-m+1}|<1} K(p_{n-m+1}, p_{n-m}) H_n(p_{n-m+1}, q_{n-m+1}) dp_{n-m+1}+$$

$$+\int_{|p_1|<1} K(p_1, p_0) \Delta_y H_m(p_1, q_0) dp_1-\Delta_y^2 H_{m-1}(p_0, q_0). \tag{61}$$

和

$$\Delta_y^{m-1} \Delta_x^m v(x,y)=-\sum_{n=m}^{\infty} \Omega_{n-m} H_n(p_{n-m}, q_{n-m})+$$

$$+\sum_{n=m+1}^{\infty} \Omega_{n-m+1} \int_{|q_{n-m}|<1} dq_{n-m} K(q_{n-m}, q_{n-m-1}) \cdot$$

$$\cdot \int_{|q_{n-m+1}|<1} K(q_{n-m+1}, q_{n-m}) H_n(p_{n-m-1}, q_{n-m+1}) dq_{n-m+1}-$$

$$-\int_{|q_1|<1} K(q_1, q_0) \Delta_x H_m(p_0, q_1) dq_1+\Delta_x^2 H_{m-1}(p_0, q_0). \tag{62}$$

从(61)或(62)可推出

$$\Delta_y^m \Delta_x^m v(x,y)=\Delta_x H_m(p_0, q_0)-\Delta_y H_m(p_0, q_0)-$$

$$-\sum_{n=m+1}^{\infty} \Omega_{n-m-1} \int_{|q_{n-m}|<1} K(q_{n-m}, q_{n-m-1})$$

$$H_n(p_{n-m-1}, q_{n-m}) dq_{n-m}+$$

$$+\sum_{n=m+1}^{\infty}\Omega_{n-m-1}\int_{|p_{n-m}|<1} K(p_{n-m},p_{n-m-1}) H_n(p_{n-m},q_{n-m-1})dp_{n-m}.$$

上式是($\overline{*}$)中用 $m+1$ 代替m的关系式，这就完成了归纳法的证明。

由(61)，

$$\Delta_y^m\Delta_x^{m-1}v(x^*,y)=\bar{H}_m(x^*,y)-\Delta_y^2\bar{H}_{m-1}(x^*,y)=$$

$$=\frac{1}{\pi}\oint\frac{f_m(x^*,q^*)(1-y^2)dq^*}{|q^*y|}-$$

$$-\int_{|q|<1} K(q,y)\Delta_y^{m+1}g_m(x^*,y)dq-\Delta_y^{m+1}g_{m-1}(x^*,y)=$$

$$=\frac{1}{\pi}\oint\frac{\Delta_y^{2m}g(x^*,q^*)(1-y^2)dq^*}{|q^*y|}-$$

$$-\int_{|q|<1} K(q,y)\Delta_y^{2m+1}g(x^*,y)\,dq-\Delta_y^{2m}g(x^*,y)=0. \tag{63}$$

由(62)

$$\Delta_y^{m-1}\Delta_x^m v(x,y^*)=\Delta_x^2 H_{m-1}(x,y^*)-H_m(x,y^*)=$$

$$=\Delta_x^{m+1}h_{m-1}(x,y^*)-$$

$$-\left[\frac{1}{\pi}\oint\frac{f_m(p^*,y^*)(1-x^2)dp^*}{|p^*x|}-\right.$$

$$\left.-\int_{|p|<1} K(p,x)\Delta_x^{m+1}h_m(p,y^*)\,dp\right]=$$

$$=\Delta_x^{m+1}h_{m-1}(x,y^*)-\Delta_x^m h_m(x,y^*)=0, \tag{63}$$

由此得

$$\Delta_x h_{m-1}(x,y^*)=h_m(x,y^*),$$

$$f_m(p^*,y^*)=\Delta_y^{2m}g(p^*,y^*)=\Delta_x^m h_m(p^*,y^*),$$

关系式(63)，(64)和 $v(x^*,y^*)=0$ 立刻得到（*），最后得：对 $C(X)\times C(Y)$的(x,y)，有

$$v(x,y)=\Delta_x u(x,y)-\Delta_y u(x,y)=0.$$

第五章　超双曲算子

§1　超双曲算子的基本解

1. 方法的原理

确定线性偏微分方程的基本解的方法很多，特别阿达玛系统阐述了基本解的定义与构造，对解决模双曲型方程的柯西问题起了重要作用。

这里所用的方法的原理是：确定一广义函数E在$R_n(n==n_1+n_2)$满足$\square E=\delta$，这里n_1与n_2为奇数，算子

$$\square=\sum_{j=1}^{n_1}\frac{\partial^2}{\partial x_j^2}-\sum_{i=1}^{n_2}\frac{\partial^2}{\partial y_i^2},$$

此时广义函数的补法线微商定义在特征锥面$\sum$：

$$\sum_{j=1}^{n_1}x_j^2-\sum_{i=1}^{n_2}y_i^2=0$$

上，此广义函数为一组常微分方程的解，是由在母线上参数变化构成的$\sum$所作成。

n_1与n_2为偶数的情形，算子$\square$的基本解由降维法得出。

若
$$x_j=s\alpha_j,\quad \sum_{j=1}^{n_1}\alpha_j^2=1,$$
$$y_i=r\beta_i,\quad \sum_{i=1}^{n_2}\beta_i^2=1,$$

则特征锥$\sum$定义为

$$r = s,$$

在锥面上取补法线微商为$\frac{\partial}{\partial s}$.

设 r_u 与 s_u 分别是 n_1-1 与 n_2-1 个出现在 n_1-1 维与 n_2-1 维单位球面的参数，我们在锥面上取参数 r, r_u, s_u，定义在锥面上的广义函数 σ_p 是在开紧致支柱 $\Omega(r>0)$ 上的无穷可微函数 $\psi(r, r_u, s_u)$的线性连续泛函，记为(σ_p, ψ). 广义函数E定义在锥面上，广义函数补法线微商的有限和，是在 R_n-0 中由

$$\langle E, \varphi\rangle = \sum_{p=0}^{k}\left(\sigma_p, \left[\frac{\partial^p}{\partial s^p}\varphi\right]\right)$$

确定，这里φ是在 R_n-0 中紧致支柱上无穷可微的函数，我们用$[f]$定义在锥面的一个函数 $f(x_i, x_j)=F$.

σ_p 仅依赖于 r，而且是在 R_n 中的拓展由形式

$$\langle E, \varphi\rangle = \lim_{\epsilon\to 0}\int_{\epsilon}^{\infty}\int_{\Omega_1}\int_{\Omega_2}\sum_{p=0}^{k}\left[\frac{\partial^p}{\partial s^p}\varphi\right]dr\,d\Omega_1 d\Omega_2$$

定义，这里 $d\Omega_1$ 与 $d\Omega_2$ 是 n_1-1 与 n_2-1 维球面的面积元素，φ是在 R_n 中紧致支柱上无穷可微函数。

在目前情形下，需要寻求存在E，具有形式 $E=\sum_{p=0}^{k}\frac{\partial^p}{\partial s^p}\tau_p$，$\tau_p$ 为在R_n 中定义在锥面上广义函数的拓展(J. Leray Cours de l'Institute for Advanced Study, Princeton, 1951-1952)。

2. *基本解的求法*

算子□的基本解满足

$$\langle\delta,\varphi\rangle=\langle\Box E,\varphi\rangle=\langle E,\Box\varphi\rangle=$$

$$=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\varepsilon}^{\infty}\int_{\Omega_1}\int_{\Omega_2}\sum_{p=0}^{k}\sigma_p\left[\frac{\partial^p}{\partial s^p}\Box\varphi\right]dr\,d\Omega_1 d\Omega_2,$$

而

$$\Box\varphi=\frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2}+\frac{n_2-1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\Delta_{r_u}\varphi-$$

$$-\frac{\partial^2\varphi}{\partial s^2}-\frac{n_1-1}{s}\frac{\partial\varphi}{\partial s}-\frac{1}{s^2}\Delta_{s_u}\varphi,$$

这里 $\Delta_{r_u}\varphi$ 与 $\Delta_{s_u}\varphi$ 分别依赖于 r_u, s_u.

$$\frac{\partial^p}{\partial s^p}\Box\varphi=\frac{\partial^2\varphi_p}{\partial r^2}+\frac{n_2-1}{r}\frac{\partial\varphi_p}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\Delta_{r_u}\varphi_p-$$

$$-\frac{\partial^2\varphi_p}{\partial s^2}-\frac{n_1-1}{s}\frac{\partial\varphi_p}{\partial s}-\frac{1}{s^2}\Delta_{s_u}\varphi_p-$$

$$-(n_1-1)\sum_{l=1}^{p}\frac{(-1)^l l!}{s^{l+1}}C_p^l\frac{\partial\varphi_{p-l}}{\partial s}-$$

$$-\sum_{l=1}^{p}C_p^l\frac{(-1)^l(l+1)!}{s^{l+2}}\Delta_{s_u}\varphi_{p-l},$$

其中 $\varphi_p=\dfrac{\partial^p\varphi}{\partial s^p}$.

另外，还有

$$\left[\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right]=\frac{\partial[\varphi]}{\partial r}-\left[\frac{\partial\varphi}{\partial s}\right],$$

与

$$\left[\frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2}\right]=\frac{\partial^2[\varphi]}{\partial r^2}-2\frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{\partial\varphi}{\partial s}\right]+\left[\frac{\partial^2\varphi}{\partial s^2}\right].$$

我们推出

$$\left[\frac{\partial^p}{\partial s^p}\Box\varphi\right]=\frac{\partial^2[\varphi_p]}{\partial r^2}+\frac{n_2-1}{r}\frac{\partial[\varphi_p]}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\Delta_{r_u}[\varphi_p]-$$

$$-2\frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{\partial\varphi_p}{\partial s}\right]-\frac{n_1+n_2-2}{r}\left[\frac{\partial\varphi_p}{\partial s}\right]-\frac{1}{r^2}\Delta_{s_u}[\varphi_p]-$$

$$-(n_1-1)\sum_{l=1}^{p}C_p^l\frac{(-1)^l l!}{r^{l+1}}\left[\frac{\partial\varphi_{p-l}}{\partial s}\right]-$$

$$-\sum_{l=1}^{p}C_p^l\frac{(-1)^l(l+1)!}{r^{l+2}}\Delta_{s_u}\varphi_{p-l}. \qquad (*)$$

$\sigma_p(p=0,\cdots,k)$是r的$k+1$个二次连续可微函数。由经典公式，$\sigma Lu-uL^*v=\operatorname{div}\vec{h}$，应用(*)式得

$$\sum_{p=0}^{k}\sigma_p\left[\frac{\partial^p}{\partial s^p}\Box\varphi\right]=\sum_{p=0}^{k+1}\mathscr{L}_p[\varphi_p]+\frac{\partial}{\partial r}I+\operatorname{div}\vec{h}_1-\operatorname{div}\vec{h}_2, \tag{1}$$

这里$\vec{h}_1$与$\vec{h}_2$的散度是在球面Ω_1与Ω_2上定义，而

$$\mathscr{L}_p\equiv 2\frac{\partial\sigma_{p-1}}{\partial r}-\frac{n_1+n_2-1}{r}\sigma_{p-1}+\frac{\partial^2\sigma_p}{\partial r^2}-\frac{\partial}{\partial r}\left\{\frac{n_2-1}{r}\sigma_p\right\}-$$

$$-(n_1-1)\sum_{h=p}^{k}h(h-1)\cdots p\frac{(-1)^{h-p+1}}{r^{h-p+2}}\sigma_h,$$

$$(p=1,2,\cdots,k),$$

$$\mathscr{L}_{k+1}\equiv 2\frac{\partial\sigma_k}{\partial r}-\frac{n_1+n_2-2}{r}\sigma_k,$$

$$\mathscr{L}_0\equiv\frac{\partial^2\sigma_0}{\partial\lambda_1^2}-\frac{\partial}{\partial r}\left\{\frac{n_2-1}{r}\sigma_0\right\}$$

$$I\equiv\sum_{p=0}^{k}\left\{\sigma_p\frac{\partial^2[\varphi_p]}{\partial r^2}-[\varphi_p]\left(\frac{\partial\sigma_p}{\partial r}-\frac{n_2-1}{r}\sigma_p\right)-\right.$$

$$\left.-2[\varphi_{p+1}]\sigma_p\right\}.$$

函数σ_p满足微分方程组：

$$\mathscr{L}_p=0, \quad (p=k+1,\cdots).$$

由第一个方程

$$\mathscr{L}_{k+1} \equiv 2\frac{\partial \sigma_k}{\partial r} - \frac{n_1 + n_2 - 2}{r}\sigma_k = 0$$

开始，可循环解上述方程。若我们取

$$\sigma_k = \alpha_k r^{-\frac{n}{2}-1},$$

α_k 是任意数，我们解

$$\mathscr{L}_k = 2\frac{\partial \sigma_{k-1}}{\partial r} - \frac{n-2}{r}\sigma_{k-1} + \frac{\partial^2 \sigma_k}{\partial r^2} +$$

$$+ \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{n_2 - 1}{r}\sigma_k\right) + (n_1 - 1)k\frac{\sigma_k}{r^2} = 0,$$

设若

$$\sigma_{k-1} = r^{-\frac{n}{2}-1}\chi_{k-1},$$

则有

$$\frac{\partial \chi_{k-1}}{\partial r} = -\frac{\alpha_{k-1}}{r^2},$$

α_{k-1} 是相对于 α_k 的比例常数，这里

$$\chi_{k-1} = \frac{\alpha_{k-1}}{r}, \quad \sigma_{k-1} = r^{-\frac{n}{2}-2},$$

可以找到函数 σ_{k-l} 的一般形式：

$$\sigma_{k-l} = \alpha_{k-l}\, r^{-\frac{n}{2}-1-l}.$$

α_l 是相对于 α_k 的比例常数，满足循环关系式：

$$2(l+1)\alpha_{l+1} = \left(\frac{n}{2} - 2 - l\right)\left(\frac{n_1 - n_2}{2} - l\right)\alpha_l -$$

$$-(n_1 - 1)\sum_{h=k-l}^{k}(-1)^{h-k+l-1}h(h-1)\cdots(k-l)\alpha_{k-h}. \tag{2}$$

若 $k = \frac{n}{2} - 2$，则函数 σ_0 在开域 Ω 中满足 $\mathscr{L}_0 = 0$；对广

义函数$\square E$，E借助于函数σ_p定义，我们将证明一比例常数等于狄拉克测度；若n_1与n_2是奇数，此常数不等于零：这时E是基本解，若n_1与n_2是偶数，则此常数是零，这时E是方程$\square E=0$的解。为了证明这个事实，在开域Ω积分(1)并运用格林公式，再取极限有

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\varepsilon}^{\infty}\int_{\Omega_1}\int_{\Omega_2}\sum_{p=0}^{k}\sigma_p\left[\frac{\partial^p}{\partial s^p}\square\varphi\right]dr\,d\Omega_1 d\Omega_2=$$

$$=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\Omega_1}\int_{\Omega_2}\Big\{I\Big\}_{r=\varepsilon}d\Omega_1 d\Omega_2=\Big\{I\Big\}_{r=0}K_1K_2.$$

然而函数σ_{k-l}以及它关于r的一阶微商当r趋于零时趋向于零，但$\dfrac{\partial\sigma_0}{\partial r}$趋于$\alpha_0$；实际上，若$k=\dfrac{n}{2}-2$，则$\sigma_l=$ $=\alpha_l r^{l+1}$。故由I的定义有

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\Big\{I\Big\}_{r=\varepsilon}=[\varphi]_{r=0}\alpha_0(n_2-2).$$

因之，

$$(\square E,\varphi)=\varphi(0,0)\alpha_0(n_2-2)K_1K_2,$$

这里$\square E$中的E是借助于函数σ_p构成，故是比例于狄拉克测度。

现在计算比例系数α_0：循环关系(2)当$k=\dfrac{n}{2}-2$时写为

$$2(k-l+1)\alpha_{l-1}=l(l+n_1-n_2+1)\alpha_l-$$
$$-(n_l-1)\sum_{h=l+1}^{k}h\cdots l(-1)^{h-l+1}\alpha_h,$$

再由关系α_l乘以l有

$$2(k-l+1)\alpha_{l-1}=l(3l+5-2n_2)\alpha_l+$$
$$+l(l+1)(l+3-n_2)\alpha_{l+1},$$

我们用古典方法求得线性方程的解

$$\alpha_0=\alpha_k(4-n_2)(6-n_2)\cdots[2(k+1)-n_2],$$

若 n_1 与 n_2 是偶数，当乘积 $(n_2-2)\alpha_c$ 为零时，E 满足

$$\square E=0;$$

若 n_1 与 n_2 是奇数，$(n_2-2)\alpha_0$ 不等于零，选择适当常数 $\alpha_k\left(\alpha_k=\dfrac{1}{K_1K_2[n_2-2]\cdots[n_2-2(k+1)]}\right)$，$E$ 满足方程 $\square E=\delta$，E 即为基本解。

3．**降维法**

若 n_1 与 n_2 是奇数，算子$\square$具有依赖于特征的基本解，给出

$$\int_{R_x}E(x)\varphi(x)dx=\int_0^\infty\iint\limits_{\Omega_1\,\Omega_2}\sum_{p=0}^{\frac{n}{2}-2}\alpha_p r^{p+1}\left[\frac{\partial^p\varphi}{\partial s^p}\right]dr\,d\Omega_1 d\Omega_2$$

降维法可以得到当n_1与n_2为偶数时算子$\square$的基本解，方式如下：考虑上面的积分，其中 φ 定义在紧致支柱上，支柱为母线平行于第 n 个坐标轴的柱面，其基底在前 $n-1$ 个坐标空间 R_{n-1} 紧致且与第 n 个坐标无关。此积分是收敛的。在 R_{n-1} 通过数量积

$$(\bar{E},\varphi)_{R_{n-1}}=\int_{R_n}E(x)\varphi(x)dx \qquad (3_1)$$

可定义广义函数 $\bar{E}$，其中 φ 是无穷可微函数，在 $R_{n-1}(\varphi\in\mathscr{D}_{n-1})$有紧致支柱。

此广义函数 $\bar{E}$ 是$\bar{\square}$的基本解，运算子具有 $n-1$ 个变数 ($n-1=n_1+n_2-1$，n_1 是奇数 n_2-1是偶数)，算子$\bar{\square}$通过

$$\square=\bar{\square}-\frac{\partial^2}{\partial x_n^2},$$

定义。

事实上，因函数 $\varphi\in\mathscr{D}_{n-1}$，我们有

$$(\bar{\Box}\bar{E},\varphi)_{R_{n-1}}=(\bar{E},\bar{\Box}\varphi)_{R_{n-1}}=(E,\Box\varphi)_{R_n}=\varphi(0),$$

$\bar{E}$ 的支柱是在 R_{n-1} 中$\bar{\Box}$的特征锥的内部

$$\sum_{i=1}^{n_1}(x_i)^2-\sum_{j=1}^{n_2-1}(x_j)^2\geqslant 0.$$

再降维给出$\bar{\bar{\Box}}$的基本解，算子具有 $n-2$ 个变数（n_1-1 与 n_2-1 是偶数），算子$\bar{\bar{\Box}}$通过

$$\bar{\Box}=\bar{\bar{\Box}}-\frac{\partial^2}{\partial x_{n_1}^2}$$

定义，$\bar{\bar{E}}$ 由

$$(\bar{\bar{E}},\varphi)_{R_{n-2}}=(\bar{E},\varphi)_{R_{n-1}}=\int_{R_n}E(x)\varphi(x)dx \qquad (3_2)$$

定义，其中 $\varphi\in\mathscr{D}_{n-2}$.

可以证明(3_1)与(3_2)是收敛的。

§ 2 变系数超双曲算子的基本解

考虑变系数超双曲算子

$$Lu\equiv\sum_{i,j=1}^{n_1}A_{ij}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\partial x_j}-\sum_{k,l=1}^{n_2}A_{kl}\frac{\partial^2 u}{\partial x_k\partial x_l}+$$

$$+\sum_{r=1}^{n}B_r\frac{\partial u}{\partial x_r}+Cu,\qquad n=n_1+n_2,$$

其中系数 A_{ij}，A_{kl}，B_r，C 为变系数，分别有适当高阶连续微商，二次型 $\Sigma A_{ij}X_iX_j$ 与 $\Sigma A_{kl}X_kX_l$ 为正定。

这算子的特征流形是一阶方程组：

$$\begin{cases} F\equiv\sum_{i,j=1}^{n_1} A_{ij}\pi_i\pi_j-\sum_{k,l=1}^{n_2} A_{kl}\pi_k\pi_l=0, \\ \sum_{i=1}^{n_1}\pi_i dx_i-\sum_{k=1}^{n_2}\pi_k dx_k=0, \end{cases}\tag{4}$$

的解。

以M点为顶点的特征角面Γ_M是由通过M的特征(4)所形成。即求解

$$\frac{dx_i}{\frac{1}{2}\frac{\partial F}{\partial \pi_i}}=-\frac{d\pi_i}{\frac{1}{2}\frac{\partial F}{\partial x_i}}=\frac{dx_k}{\frac{1}{2}\frac{\partial F}{\partial \pi_k}}=\frac{d\pi_k}{\frac{1}{2}\frac{\partial F}{\partial x_k}}=d\lambda,\tag{5}$$

并在M点满足

$x_r=x_r^0,\ \pi_r=\pi_r^0$ 与 $F_0\equiv\Sigma A_{ij}^0\pi_i^0\pi_j^0-\Sigma A_{kl}^0\pi_k^0\pi_l^0=0,$

我们在空间R_n这样取参数：$\lambda,\mu,\theta_i,\theta_k$ 使得 $x_r(\lambda,\theta_i,\theta_k)$ 在R_n中是(5)的解，即

$$x_i=x_i(\lambda,\theta_i,\theta_k),$$
$$x_k=x_k(\mu,\theta_i,\theta_k);$$

Γ_M的方程为$\lambda=\mu$.

设R_n中的函数φ定义在Γ_M上用$[\varphi]$表示，算子L可转换为如下形式：

$$\sum_{p=0}^{k}\sigma_p\left[\frac{\partial^p Lu}{\partial\mu^p}\right]=C[u]+\sum_{p=1}^{k+1}\mathcal{O}_p\left[\frac{\partial^p u}{\partial\mu^p}\right]+\operatorname{div}\mathscr{H},$$

这里σ_p是定义在Γ_M的函数，由

$$\mathcal{O}_p=0,\quad (p=1,\cdots,k+1)$$

确定。

$\mathcal{O}_p=0$是σ_p的一阶微分方程，对这方程，分别循环求解。得解

$$\sigma_p=\omega_p\lambda^{\frac{n}{2}-2+p-k},$$

这里 ω_p 为连续且有界的函数。

若 $Lu=\psi$，当 $k=\left(\frac{n}{2}\right)-2$ 时，有

$$Ku=\int_{\Gamma_M}\cdots\int\left\{\sum_{p=0}^{k}\sigma_p\left[\frac{\partial^p\psi}{\partial\mu^p}\right]-C[u]\right\}d\lambda d\Omega_1 d\Omega_2, \quad (6)$$

(n_1，n_2 是奇数，K 为非零常数）。

依赖于 Γ_M 的广义函数，由数量积

$$(\sigma,\psi)=\int_{\Gamma_M}\cdots\int\left\{\sum_{p=0}^{k}\sigma_p\left[\frac{\partial^p\psi}{\partial\mu^p}\right]\right\}d\lambda d\Omega_1 d\Omega_2$$

定义，求解积分方程（6）得

$$u(x_0)=\int_{R_n}E_{x_0}(x)\psi(x)dx,$$

$E_{x_0}(x)$ 是 L^* 在 x_0 的基本解，因之有

$$L^*E_{x_0}(x)=\delta(x_0),$$

(L^* 伴随于 L)。

广义函数 $E(x_0, x)$ 在乘积空间 $R_n\times R_n$ 由数量积定义为：

$$(E(x_0,x), \ \psi(x_0,x))=\int_{R_n}\int_{R_n}E_{x_0}(x)\psi(x_0,x)dxdx_0,$$

它确定一个连续函数

$$\nu(x)=\int_{R_n}E(x_0,x)\psi(x_0)dx,$$

$\nu(x)$ 是在广义函数意义下 $L^*\nu=\psi$ 的解。若 L 的系数与 ψ 足够可微，ν 是通常意义解。

§ 3 超双曲算子的渐近衰减

1. 超双曲算子

考虑算子

$$Lu=(\Delta_x-\Delta_y)u, \tag{7}$$

在 $n+2$ 维空间 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 与 $y=(y_1,y_2)$，命 D 是在 x 空间的有界区域，Γ 是正锥 $\{(y_1,y_2)$：$0\leqslant y_1<\infty, 0\leqslant y_2<\infty\}$，$(n+2)$ 维区域 $D\times\Gamma$ 记为 Ω，其境界 $\partial\Omega$ 由 $D\times\partial\Gamma$ 与 $\partial D\times\Gamma$ 组成，命 u 定义在 $\Omega\cup\partial\Omega$ 并满足边界条件

$$u=0 \quad 在\ \partial\Omega 上, \tag{8}$$

命 $r^2=y_1^2+y_2^2$，且定义 $z=r^\gamma u$，这里 γ 是正常数，我们有

$$Lu=r^{-\gamma}Lz+2\gamma r^{-\gamma-2}\sum_{i=1}^{2}y_i z_{y_i}-\gamma^2 r^{-\gamma-2}z,$$

由此得

$$r^{2\gamma+2}|Lu|^2\geqslant 4\gamma(Lz)\sum_i y_i z_{y_i}-4\gamma^3 r^{-2}\sum_i z\,z_{y_i},$$

对于某正数 M，$r\leqslant M$，若在 Ω 的子集 J 的外部 $u\equiv 0$，有

$$\int_\Omega r^{2\gamma+2}|Lu^2|dV\geqslant 4\gamma\int_\Omega (Lz)\sum_i y_i z_{y_i}dV-$$

$$-4\gamma^3\int_\Omega r^{-2}\sum_i z\,z_{y_i}dV=I_1+I_2,$$

在右端部分积分得

$$I_1=2\gamma\sum_{i=1}^{n}\int_\Omega z_{x_i}^2 dV,\quad I_2=0,$$

因此对任何满足(8)且在 J 的外部为零的函数 u，我们有

$$2\gamma\int_\Omega r^{2\gamma}\sum_{i=1}^n u_{x_i}^2 dV\leqslant\int_\Omega r^{2\gamma+2}|Lu|^2dV,$$

由于边界条件(8)，有常数 C_0 使得

$$\int_\Omega r^{2\gamma}u^2dV\leqslant C_0\int_\Omega r^{2\gamma}\sum_{i=1}^n u_{x_i}^2 dV.$$

在Ω中我们考虑函数 v 满足不等式

$$|Lv|\leqslant a|v|+b\sum_{i=1}^n|v_{x_i}| \tag{9}$$

并满足边界条件 $v=0$ 在 $\partial\Omega$上，并假定 v 如此衰减：

$$r^\gamma\int_{G_r}\sum_{i=1}^n|v_x^2|^2dS\to 0,\ 当\ r\to\infty, \tag{10}$$

对于所有 $\gamma>0$ 成立，区域 G_r 是$(n+1)$维集 $\Omega\cap\{(y_1,y_2):y_1^2+y_2^2=r^2\}$，$dS$ 是 G_r 上$(n+1)$维体积元素。

1　在Ω中命 v 满足(9)并假定 $r\to\infty$ 时$a=o(r^{-1})$，$b=o(r^{-1})$，且满足边界条件 $v=0$ 在$\partial\Omega$并假定对每一$\gamma>0$，(10)成立，那末在Ω内 $v\equiv 0$。

证：对每一固定的 r，我们有

$$\int_{G_r}v^2dS\leqslant C_1\int_{G_r}\sum_{i=1}^n|v_{x_i}|^2dS$$

并且

$$r^{2\gamma}\int_{G_r}v^2dS\to 0,\ 当\ r\to\infty,\ 对\ \gamma>0 \tag{11}$$

对于满足(10)与边界条件 $v=0$ 在$\partial\Omega$的函数有

$$2\gamma\int_\Omega r^{2\gamma}\sum_{i=1}^n v_{x_i}^2\leqslant\int_\Omega r^{2\gamma+2}|Lv|^2d\Omega,$$

因此

$$|Lv|^2 \leqslant c_2 r^{-2}|v|^2 + c_3 r^{-2}\sum_{i=1}^{n}|v_{x_i}|^2,$$

c_2 与 c_3 为常数，运用(11)则有

$$2\gamma\int_{\Omega} r^{2\gamma}\left(v^2+\sum_{i=1}^{n}|v_{x_i}|^2\right)dV \leqslant$$

$$\leqslant \int_{\Omega} r^{2\gamma}(c_2|v|^2 + c_3|v_{x_i}|^2)dV,$$

命 $r\to\infty$，我们推出在 Ω 内 $v\equiv 0$.

定理 2 命 v 在 Ω 中满足 (9)，并假定 a 与 b 是有界函数，命 v 满足边界条件

$$v=0, \text{ 在 } \partial\Omega \text{ 上},$$

并假定

$$(\exp 2r^{\gamma})\int_{G_r}\sum_{i=1}^{n}|v_{x_i}|^2 dS\to 0, \text{ 当 } r\to\infty, \tag{12}$$

那末在 Ω 内 $v\equiv 0$.

证：命

$$z=(\exp r^{\gamma})v, \quad \gamma>0,$$

计算得

$$(\exp 2r^{\gamma})|Lv|^2=$$

$$=\left[Lz+2\gamma r^{\gamma-2}\sum_{i=1}^{2}y_i z_{y_i}+\gamma^2 r^{\gamma-2}(1-r^{\gamma})z\right]^2,$$

因此

$$r^{-\gamma+2}(\exp 2r^{\gamma})|Lu|^2 \geqslant$$

$$\geqslant r\gamma(Lz)\sum_{i=1}^{3}y_i z_{y_i} - 4\gamma^3 r^{\gamma-2}(r^{\gamma}-1)z\sum_{i=1}^{3}y_i z_{y_i}$$

对于充分大的$x\in\Omega$假定v为零，则有

$$\int_\Omega r^{-\gamma+2}(\exp 2r^\gamma)|Lv|^2dV\geqslant$$

$$\geqslant 4\gamma\int_\Omega (Lz)\sum_{i=1}^{2}y_iz_{y_i}dV-$$

$$-4\gamma^3\int_\Omega r^{\gamma-2}(r^\gamma-1)z\sum_{i=1}^{2}y_iz_{y_i}dV,$$

部分积分得

$$\int_\Omega r^{-\gamma+2}(\exp 2r^\gamma)|Lv|^2dV\geqslant$$

$$\geqslant 2\gamma\int_\Omega \sum_{i=1}^{n}z_{x_i}^2dV+4\gamma^4\int_\Omega r^{\gamma-2}(r^\gamma-1)z^2dV,$$

因之，

$$\int_\Omega r^{-\gamma+2}(\exp 2r^\gamma)|Lv|^2dV\geqslant$$

$$\geqslant 2\gamma\int_\Omega (\exp 2r^\gamma)\sum_{i=1}^{n}v_{x_i}^2dV+$$

$$+4\gamma^4\int_\Omega r^{\gamma-2}(r^\gamma-1)(\exp 2r^\gamma)v^2dV,$$

命$\zeta(r)$是一光滑函数，它在$0\leqslant r\leqslant 1$为零，对$r\geqslant r_0>1$它等于1。置$w=\zeta v$，这里v满足(9)，$0<\zeta<1$，注意到(12)，运用上述方法可推出在Ω内$v\equiv 0$.

2. 广义超双曲算子

考虑一致椭园算子

$$Au=\sum_{i,j=1}^{n}\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right)\left[a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_i}\right]$$

定义在一有界区域D中。我们将研究算子

$$Lu=(A-\Delta_y)u,$$

它定义在$(n+2)$维空间内，这里$y=(y_1,y_2)$。假定u在$\Omega=$ $=D\times\Gamma$定义且

$$u=0,\ 在\ \partial\Omega\ 上, \tag{13}$$

对于满足

$$|Lu|\leqslant a|u|+b\sum_{i=1}^{n}|u_{x_i}| \tag{14}$$

的函数u有如下定理：

定理 3 命在Ω内u满足(13)与(14)，并假定当$r\to\infty$时$a=o(r^{-1})$，$b=o(r^{-1})$，若

$$r^{\gamma}\int_{G_r}\sum_{i=1}^{n}|u_{x_i}|^2dS\to 0,\ 当\ r\to\infty, \tag{15}$$

则在Ω内$u\equiv 0$。

证：命$z=r^{\gamma}u$，则有

$$Lu=r^{-\gamma}Lz+2\gamma r^{-\gamma-2}\sum_{i=1}^{2}y_iz_{y_i}-\gamma^2r^{-\gamma-2}z,$$

因此

$$r^{2\gamma+2}|Lu|^2\geqslant 4\gamma(Lz)\sum_{i=1}^{2}y_iz_{y_i}-4\gamma^3r^{-2}\sum_{i=1}^{2}z\,z_{y_i},$$

暂假定对x函数u具紧支柱，我们有

$$\int_{\Omega}r^{2\gamma+2}|Lu|^2dV\geqslant 4\gamma\int_{\Omega}(Lz)\sum_{i=1}^{2}y_iz_{y_i}dV-$$
$$-4\gamma^3\int_{\Omega}r^{-2}\sum_{i=1}^{2}y_izz_{y_i}dV\equiv I_1+I_2,$$

如前，可以得到

$$I_2=0,$$

$$I_1=2\gamma\int_{\Omega}\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}(x)z_{x_i}z_{x_j}dV,$$

计算中注意一致椭园性，我们得到

$$2\gamma m_0\int_{\Omega}r^{2\gamma}\sum_{i=1}^{n}u_{x_i}^2dV\leqslant\int_{\Omega}r^{2\gamma+2}|Lu|^2dV.$$

系数 a_{ij} 亦可依赖于 y_1,y_2，在此情况下，假设$\frac{\partial}{\partial r}(a_{ij})=$ $=o(r)$将导致和定理 3 同样结果。

§ 4　超双曲算子的渐近性态与柯西问题

1. 指数衰减

设L是超双曲算子：

$$L\equiv\Delta_y-\Delta_x,$$

$x=(x_1,\cdots,x_m)$，$y=(y_1,\cdots,y_n)$，考虑方程

$$Lu=F(x,y,u,\nabla_x u,\nabla_y u),\tag{16}$$

这里F满足

$$|F(x,y,z,a,b)|\leqslant\Phi_0|z|+\Phi_1|a|+\Phi_2|b|,$$

其中 $z\in R$，$a\in R^m$，$b\in R^n$，$\Phi_i(i=0,1,2)$ 为正常数。设D是 R^m 内有界域，Γ是 R^n 内的锥面，考虑在 $D\times\Gamma$ 内 (16) 的解，它满足边界条件

$$u=0,\ 在\ \partial(D\times\Gamma),\tag{16$_1$}$$

命 $r^2=y_1^2+\cdots+y_n^2$，定义集合：

$C(R)=\{y\in\Gamma;\ r=R\}$,

$\Gamma(R)=\{y\in\Gamma;\ 1<r<R\}$,　　$1<R\leqslant\infty$.

在 R^n 内定义内积为

$$(u,v)=(u,v)_D=\int_D u(x,y)v(x,y)dx,$$

相伴范数为

$$\|v\|=\|v\|_D=(v,v)^{\frac{1}{2}},$$

用能量积分

$$\varepsilon(u,R)=R^{1-n}\int_{C(R)}[\|u\|^2+\|\nabla_x u\|^2+\|u_r\|^2]d\sigma$$

度量(16)的解的衰减率，这里

$$u_r=\sum_{k=1}^{n}r^{-1}y_k\frac{\partial u}{\partial y_k}$$

是 R^n 中的径向导数。

定理 1 设在 $D\times\Gamma$ 上 $u\in C^2$, $L=\Delta_y-\Delta_x$，若 u 满足边界条件(16_1)，则存在数 $\lambda_1>0,\alpha>1$，使得对于 $R>1,\lambda>\lambda_1$，有

$$\int_{\Gamma(R)} r^{3-\alpha-n}\exp(2\lambda r^{\alpha})\|Lu\|^2dy+$$

$$+6(\lambda\alpha)^3R^{2\alpha-1}\exp(2\lambda R^{\alpha})\varepsilon(u,R)\geqslant$$

$$\geqslant(\lambda\alpha)^3\int_{\Gamma(\ )} r^{2\alpha-n-1}\exp(2\lambda r^{\alpha})\|u\|^2dy+$$

$$+\frac{1}{2}\lambda\alpha\int_{\Gamma(R)} r^{1-n}\exp(2\lambda r^{\alpha})[\|\nabla_x u\|^2+\|\nabla_y^2 u\|^2]dy+$$

$$+2\lambda\alpha\,\varepsilon(u,1). \tag{17}$$

λ_1 的值仅依赖于 n，u 的值仅依赖于 $D\times C(1)$。

证：命 $w=u\exp(\lambda r^{\alpha})$，选 $\lambda>n-1$，计算得

$$e^{2\lambda r^{\alpha}}Lu=Lw-2\lambda\alpha r^{\alpha-1}w_r+\lambda\alpha r^{\alpha-2}(\lambda\alpha r^{\alpha}-\alpha-n+2)w,$$

因此，

$$e^{2\lambda r^{\alpha}}|Lu|^2 \geqslant (2\lambda\alpha r^{\alpha-1}w_r)^2 -$$
$$-4\lambda\alpha r^{\alpha-1}w_r[Lw+\lambda\alpha r^{\alpha-2}(\lambda\alpha r^{\alpha}-\alpha-n+2)w].$$

乘上面表达式以 $r^{2-\alpha-n}$ 且在 $D\times\Gamma(R)$ 上积分，有

$$\int_{\Gamma(R)} r^{3-\alpha-n}\exp(2r^{\alpha}\lambda)\|Lu\|^2 dy \geqslant I_1+I_2+I_3+I_4,$$

这里，

$$I_1=(2\lambda\alpha)^2\int_{\Gamma(R)} r^{\alpha+1-n}\|w_r\|^2 dy,$$

$$I_2=-4\lambda\alpha\int_{\Gamma(R)} r^{2-n}(w_r,\varDelta_y w)dy,$$

$$I_3=4\lambda\alpha\int_{\Gamma(R)} r^{2-n}(w_r,\varDelta_x w)dy,$$

$$I_4=-(2\lambda\alpha)^2\int_{\Gamma(R)} r^{\alpha-n}(\lambda\alpha r^{\alpha}-\alpha-n+2)(w,w_r)dy,$$

部分积分并在计算中运用(16_1)，得到

$$I_2=-4\lambda\alpha(n-1)\int_{\Gamma(R)} r^{1-n}\|w_r\|^2 dy+$$
$$+2\lambda\alpha\int_{\Gamma(R)} r^{1-n}\|\nabla_y w\|^2 dy-$$
$$-2\lambda\alpha\int_1^R \frac{d}{dr}\int_{C(r)} r^{2-n}[2\|w_r\|^2-\|\nabla_y w\|^2]d\sigma dr,$$

$$I_3=2\lambda\alpha\int_{\Gamma(R)} r^{1-n}\|\varDelta_x w\|^2 dy-$$

$$-2\lambda\alpha\int_1^R \frac{d}{dr}\int_{C(r)} r^{2-n}\|\nabla_x w\|^2 d\sigma dr,$$

$$I_4=2\lambda^2\alpha^2\int_{\Gamma(R)} r^{\alpha-n-1}[\lambda\alpha r^2+(\alpha-1)$$

$$(2\lambda\alpha r^\alpha-\alpha-n+2)]\|w\|^2 dy-$$

$$-2\lambda^2\alpha^2\int_1^R \frac{d}{dr}\int_{C(r)} r^{\alpha-n}(\lambda\alpha r^\alpha-\alpha-n+2)\|w\|^2 d\sigma dr,$$

因为 $\alpha>1,\lambda\geqslant n-1$ 且 $r\geqslant1$,故 I_4 中的第一个积分是非负的,而且 I_1 到 I_4 所有沿 $\Gamma(R)$ 的积分，它们的和也是非负的。命

$$H(\rho)=\rho^{2-n}\int_{C(\rho)}[2\|w_r\|^2-\|\nabla_y w\|^2+\|\nabla_x w\|^2]d\sigma+$$

$$+\lambda\alpha\rho^{\alpha-n}(\lambda\alpha\rho^\alpha-\alpha-n+2)\int_{C(R)}\|w\|^2 d\sigma,$$

则有

$$\int_{\Gamma(R)} r^{3-\alpha-n}e^{2\lambda r^\alpha}\|Lu\|^2 dy\geqslant$$

$$\geqslant 2\lambda\alpha\int_{\Gamma(R)} r^{1-n}[\|\nabla_x w\|^2+\|\nabla_y w\|^2]dy+$$

$$+2(\lambda\alpha)^3\int_{\Gamma(R)} r^{2\alpha-n-1}\|w\|^2 dy-2\lambda\alpha H(R)+2\lambda\alpha H(1). \tag{18}$$

因 $w=u\exp(2r^\alpha\lambda)$，计算得

$$|\nabla_y w|^2=e^{2\lambda r^\alpha}\left\{(\lambda\alpha r^{\alpha-1}u)^2+2\lambda\alpha r^{\alpha-1}u\,u_r+|\nabla_y u|^2\right\},$$

运用不等式

$$|2\lambda\alpha r^{\alpha-1}u\,u_r|\leqslant\frac{3}{2}(\lambda\alpha r^{\alpha-1}u)^2+\frac{2}{3}u_r^2,$$

则有 $$|\nabla_y w|^2\geqslant e^{2\lambda r^\alpha}\left\{\frac{1}{3}|\nabla_y u|^2-\frac{1}{2}(\lambda\alpha r^{\alpha-1}u)^2\right\},$$

由(18)我们有

$$\int_{\Gamma(R)} r^{3-\alpha-n}e^{2\lambda r^\alpha}\|Lu\|^2dy+2\lambda\alpha H(R)\geqslant$$

$$\geqslant 2\lambda\alpha\int_{\Gamma(R)} r^{1-n}e^{2\lambda r^\alpha}[\|\nabla_x u\|^2+\|\nabla_y u\|^2]dy+$$

$$+(\lambda\alpha)^3\int_{\Gamma(R)} r^{2\alpha-1-n}e^{2\lambda r^\alpha}\|u\|^2dy+2\lambda\alpha H(1).$$

由$H(\rho)$的定义，当$R\geqslant 1$时有

$$H(R)\leqslant R^{2-n}\int_{C(R)}[\|w_r\|^2+\|\nabla_x w\|^2+\lambda^2\alpha^2 r^{2\alpha-2}\|w\|^2]d\sigma\leqslant$$

$$\leqslant R^{2-\alpha}e^{2\lambda R^\alpha}\int_{C(R)}[\|\lambda\alpha r^{\alpha-1}u+u_r\|^2+$$

$$+\|\nabla_x u\|^2+\|\lambda\alpha r^{\alpha-1}u\|^2]d\sigma,$$

通过计算可给出估计

$$H(R)\leqslant 3(\lambda\alpha)^2R^{2\alpha-1}e^{2\lambda R^\alpha}\varepsilon(u,R),$$

又对充分大λ，有$H(1)\leqslant\varepsilon(u,1)$，故定理得证。

不改变证明，可以提其它边界条件，假设$\partial(D\times\Gamma)$包含两部分K_1与K_2使得$K_1\cup K_2=\partial(D\times\Gamma)$且$K_1\cap K_2=\phi$，则对边界条件

$$u=0,\quad 在K_1上,$$

$$\frac{\partial u}{\partial n}=0,\quad 在K_2上, \qquad (16_2)$$

也给出定理 1 的不等式。

定理 2　假设在 $D\times\Gamma$ 上 $u\in C^2$ 且 $L=\Delta_y-\Delta_x$，命 u 满足(16₁)或(16₂)，对 $y\in\Gamma$，u 满足不等式

$$\|Lu\|\leqslant\Phi\left\{\|u\|^2+\|\nabla_x u\|^2+\|u_r\|^2\right\}$$

Φ 是常数，则对充分大的 λ，下面不等式成立：

$$\lambda^3R^3\exp(2\lambda R^2)\varepsilon(u,R)\geqslant$$
$$\geqslant\int\limits_{\Gamma(R)} r^{-n+3}e^{2\lambda r^2}\|u\|^2dy+C_0\lambda\varepsilon(u,1),\qquad(19)$$

其中 C_0 是一常数。

证：应用不等式(17)，当 $\alpha=2$ 有

$$48\lambda^3R^3e^{2\lambda R^2}\varepsilon(u,R)\geqslant$$
$$\geqslant\int\limits_{\Gamma(R)}\left\{8\lambda^3-\Phi r^{-2}\right\}r^{-n+3}e^{2\lambda r^2}\|u\|^2dy+$$
$$+\int\limits_{\Gamma(R)}\left\{\lambda-\Phi\right\}r^{1-n}e^{2\lambda r^2}\left\{\|\nabla_x u\|^2+\|\Delta_y u\|^2\right\}dy+$$
$$+4\lambda\varepsilon(u,1),$$

选择 λ 使得 $8\lambda^3>\Phi r^{-2}+1$，且对 $r\geqslant1$ 有 $\lambda>\Phi$，即得所要证明的不等式。

借助(19)，能够建立(16)，(16₁)的解的渐近性质的结果。

定理 3　命 $L=\Delta_y-\Delta_x$，假定 u 是(16)，(16₁)在 $D\times\Gamma$ 内的 C^2 解，则

(1) 有不依赖 u 的常数 K 与 μ 使得对 $R>1$，有不等式：

$$\varepsilon(u,R)\geqslant KR^{-3}\exp(-2\mu R^2)\varepsilon(u,1).\qquad(20)$$

(2) 若 $\varepsilon(u,R)=o(\exp(-\lambda R^2))$，$\lambda>0$，得到 $u\equiv0$ 在

$D\times\Gamma(\infty)$.

(3) 若 $\varepsilon(u,R)=0$, $R>0$, 则 $\|u\|^2=0$ 在 $\Gamma(R)$ 内, 因之, 除非 $u\equiv0$, 在 $D\times\Gamma(\infty)$ 内 u 不能有有界支集。

证: 不等式(20)是定理 2 的直接结论, 由此不等式与(19)可以得到(2)和(3)。

对于算子

$$L=\Delta_x-A_x,\quad A_x=\sum_{i,j=1}^{m}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}\frac{\partial}{\partial x_j}\right),$$

在 $D\times\Gamma$ 中是自伴一致椭圆算子, 假定 $a_{ij}=a_{ij}(x,y)$ 满足附加条件

$$a_{ij}\xi_i\xi_j+2r(a_{ij})_r\xi_i\xi_j\geqslant0,$$
$$(x,y)\in D\times\Gamma,\ \xi\in R^m。\tag{21}$$

定理 4 设 $L=\Delta_y-A_x$, 且 A_x 满足(21),假定在 $D\times\Gamma$ 内 $u\in C^2$, 并且 u 在 $\partial(D+\Gamma)$ 为零,则有正常数 κ, K_0,K_1, λ_1 使得

$$\int_{\Gamma(R)} r^{3-\alpha-n}\exp(2\lambda r^\alpha)\|Lu\|^2dy+$$
$$+K_1(\lambda\alpha)^3R^{2\alpha-1}\exp(2\lambda R^\alpha)\varepsilon(u,R)\geqslant$$
$$\geqslant\kappa\lambda\alpha\int_{\Gamma(R)} r^{-n+1}\exp(2\lambda r^\alpha)\left\{\|\nabla_x u\|^2+\|\nabla_y u\|^2\right\}dy+$$
$$+(\lambda\alpha)^3\int_{\Gamma(R)} r^{2\alpha-n-1}\exp(2\lambda r^\alpha)\|u\|^2dy+K_0\varepsilon(u,1)$$

对 $\alpha\geqslant1$, $R>1$, $\lambda>\lambda_1$ 成立。量 κ, K_0, K_1 仅依赖于 A_x 中的系数, λ_1 仅依赖于 n, u 的值定义在 $R=1$.

证: 命 $w=u\exp(\lambda r^\alpha)$, 则

$$e^{\lambda r^{\alpha}}Lu=Lw-2\lambda\alpha r^{\alpha-1}w_r+\lambda\alpha r^{\alpha-2}(\lambda\alpha r^{\alpha}-\alpha-n+2)w.$$

因此

$$e^{2\lambda r^{\alpha}}|Lu|^2\geqslant-2(2\lambda\alpha r^{\alpha-1}w_r)$$
$$[\Delta_y w-A_x w+\lambda\alpha r^{\alpha-2}(\lambda\alpha r^{\alpha}-\alpha-n+2)w]+$$
$$+(2\lambda\alpha r^{\alpha-1}w_r)^2,$$

以 $r^{-\alpha-n+3}$ 乘上不等式并沿 $D\times\Gamma(R)$ 上积分得

$$\int\limits_{\Gamma(R)} r^{-\alpha-n+3}\,e^{2\lambda r^{\alpha}}\|Lu\|^2dy\geqslant\sum_{i=1}^{4}J_i, \tag{22}$$

这里 $J_i=I_i$, $i=1,2,4$, I_i 同定理 1 证明中的定义，而

$$J_3=4\lambda\alpha\int\limits_{\Gamma(R)} r^{-n+2}\int\limits_{D} w_r A_x w\,dx\,dy,$$

部分积分我们有

$$J_3=2\lambda\alpha\int\limits_{\Gamma(R)} r^{-n+1}\int\limits_{D}(w_{x_i}a_{ij}\,w_{x_j}+ra_{ij,r}w_{x_i}w_{x_j})dxdy$$
$$-2\lambda\alpha R^{-n+2}\int\limits_{C(R)}\int\limits_{D}w_{x_i}a_{ij}\,w_{x_j}dxd\sigma+$$
$$+2\lambda\alpha\int\limits_{C(1)}\int\limits_{D}w_{x_i}a_{ij}\,w_{x_j}dxd\sigma.$$

注意到(21)不难有

$$J_3\geqslant\lambda\alpha m_0\int\limits_{\Gamma(R)} r^{-n+1}\|\nabla_x w\|^2dy-2\lambda\alpha M_0\,R^{-n+2}\int\limits_{C(R)}\|\nabla_x w\|^2d\sigma+$$
$$+2\lambda\alpha m_0\int\limits_{C(1)}\|\nabla_x w\|^2d\sigma,$$

这里 M_0, m_0 是 A_x 的上，下椭圆性常数。

在(22)中作出 J_i ($i=1,\cdots,4$) 的估计，和定理 1 的证明一样，便得到定理所要证明的不等式。

借助定理 4，我们可得不等式

$$\|Lu\|^2\leqslant\Phi(\|u\|^2+\|\nabla_x u\|^2+\|\nabla_y^2 u\|)$$

的解的渐近性态，完全类同于定理 3 给出的结论。

2. 多项式衰减

若方程

$$Lu=F(x,y,u,\ \nabla_x u,\nabla_y u), \tag{23}$$

的右端满足更多限制条件，(23)的解的衰减率有更严格的极限。首先考虑 $L=\Delta_y-\Delta_x$，且对 $y\in\Gamma$

$$\|Lu\|^2\leqslant\Phi_0^2 r^{-2}\|u\|^2+\Phi_1^2 r^{-2}\|\nabla_x u\|^2, \tag{23_1}$$

附加的边界条件是

$$u=0,\quad \text{在 } \partial(D\times\Gamma)\text{上。} \tag{23_2}$$

因为D是有界的，条件 (23_2) 意思是有仅依赖于D的大小的常数K，使得

$$\|u\|^2\leqslant K\|\nabla_x u\|^2.$$

定理 5 设 $L=\Delta_y-\Delta_x$，假定$u\in C^2(D\times\Gamma)$并满足(23_2)，则有一数 α_0，使得对 $\alpha>\alpha_0$，下列不等式成立：

$$\int\limits_{\Gamma(R)} r^{-n+2\alpha+4}\|Lu\|^2dy+6\alpha^2(\alpha+2)R^{2\alpha+2}\varepsilon(u,R)\geqslant$$

$$\geqslant4\alpha\int\limits_{\Gamma(R)} r^{-n+2\alpha+2}\|\nabla_x u\|^2dy+\alpha\varepsilon(u,1),$$

α_0仅依赖于 n 及 u 对 $r=1$ 的值。

证：命 $w=r^\alpha u$，这里 $\alpha>n-2$，和证明定理 1 一样，

$$r^{2\alpha}|Lu|^2\geqslant-2(2\alpha r^{-1}w_r)(Lw+\alpha(\alpha-n+2)r^{-2}w)+$$

$$+(2\alpha r^{-1}w_r),$$

以 r^{-n+4} 乘此不等式并沿 $D\times\Gamma(R)$ 积分有

$$\int_{\Gamma(R)} r^{2\alpha-n+4}\|Lu\|^2dy\geqslant T_1+T_2+T_3+T_4, \tag{24}$$

其中

$$T_1=4\alpha^2\int_{\Gamma(R)} r^{-n+2}\|w_r\|^2dy,$$

$$T_2=-4\alpha\int_{\Gamma(R)} r^{-n+3}\int_D w_r\Delta_y wdxdy,$$

$$T_3=4\alpha\int_{\Gamma(R)} r^{-n+3}\int_D w_r\Delta_x wdxdy,$$

$$T_4=-4\alpha^2(\alpha-n+2)\int_{\Gamma(R)} r^{-n+1}\int_D ww_rdxdy.$$

部分积分并注意(23_2)得

$$T_2=-2\alpha\int_{C(R)} r^{-n+3}\left\{2\|w_r\|^2-\|\nabla_y w\|^2\right\}d\sigma+$$

$$+2\alpha\int_{C(1)}\left\{2\|w_r\|^2-\|\nabla_y w\|^2\right\}d\sigma-$$

$$-4\alpha(n-2)\int_{\Gamma(R)} r^{-n+2}\|w_r\|^2dy,$$

$$T_3=-2\alpha\int_{C(R)} r^{-n+3}\|\nabla_x w\|^2\,d\sigma+2\alpha\int_{C(1)}\|\nabla_x w\|^2d\sigma+$$

$$+4\alpha\int_{\Gamma(R)} r^{-n+2}\|\nabla_x w\|^2dy,$$

$$T_4=-2\alpha^2(\alpha-n+2)\int\limits_{C(R)} r^{-n+1}\|w\|^2 d\sigma+$$

$$+2\alpha^2(\alpha-n+2)\int\limits_{C(1)}\|w\|^2 d\sigma.$$

因为 $\alpha>n-2$，则有

$$T_1+T_2\geqslant -2\alpha R^{-n+3}\int\limits_{C(R)}\left\{\|w_r\|^2-\|\nabla_y w\|^2\right\}d\sigma+$$

$$+2\alpha\int\limits_{C(1)}\left\{2\|w_r\|^2-\|\nabla_y w\|^2\right\}d\sigma,$$

命

$$Q(\rho)=\rho^{-n+3}\int\limits_{C(\rho)}\left\{\|\nabla_x w\|^2+2\|w_r\|^2-\|\nabla_y w\|^2+\right.$$

$$\left.+\alpha(\alpha-n+2)\rho^{-2}\|w\|^2\right\}d\sigma,$$

则不等式(24)变为

$$\int\limits_{\Gamma(R)} r^{2\alpha-n+4}\|Lu\|^2 dy+2\alpha Q(R)\geqslant$$

$$\geqslant 4\alpha\int\limits_{\Gamma(R)} r^{2\alpha-n+2}\|\nabla_x u\|^2 dy+2\alpha Q(1), \qquad (25)$$

显然，

$$Q(R)\leqslant R^{2\alpha-n+3}\int\limits_{C(R)}\left\{\|\nabla_x u\|^2+\|\alpha r^{-1}u+u_r\|^2+\right.$$

$$\left.+\alpha(\alpha+2)r^{-2}\|u\|^2\right\}d\sigma,$$

因此，

$$Q(R)\leqslant 3\alpha(\alpha+2)R^{2\alpha+2}\varepsilon(u,\ R),$$

不失一般性，我们假定 $u\not\equiv 0$，对 $r=1$，因此，若 α 充分大，有

$$Q(1)\geqslant\varepsilon(u,1),$$

把估计式 $Q(R)$ 与 $Q(1)$ 代入(25)，立刻得到所要的结论。

定理 6 设 $L=\Delta_y-\Delta_x$ 并假定在 $D\times\Gamma$ 内 $u\in C^2$ 是(23_1)的解且满足边界条件(23_2)，对充分大的 α，则有

$$6\alpha^2(\alpha+2)R^{2\alpha+2}\varepsilon(u,R)\geqslant$$

$$\geqslant\alpha\int_{\Gamma(R)} r^{2\alpha-n+2}\|\nabla_x u\|^2dy+\alpha\varepsilon(u,1).$$

证：由定理 5 所证明的不等式开始，利用(23_1)对 $\|Lu\|$ 的估计，有

$$6\alpha^2(\alpha+2)R^{2\alpha+2}\varepsilon(u,R)\geqslant$$

$$\geqslant(4\alpha-\Phi_0^2\kappa-\Phi_1^2)\int_{\Gamma(R)} r^{2+2\alpha-n}\|\nabla_x^2 u\|dy+\alpha(u,1),$$

如此选 α 使得 $4\alpha-\Phi_0^2\kappa-\Phi_1^2>\alpha$，即得所要证明的结论。

对多项式衰减，可得类似定理的结果如下：

定理 7 设 $L=\Delta_y-\Delta_x$，并假定在 $D\times\Gamma$ 内 u 满足(23_1)与(23_2)，则

(1) 对 $R>1$，有正常数 κ 与 μ，使得

$$\varepsilon(u,R)\geqslant\kappa R^{-\mu}\varepsilon(u,1).$$

(2) 若对 $\beta>0$，当 $R\to\infty$ 时 $\varepsilon(u,R)=O(R^{-\beta})$，则在 $D\times\Gamma(\infty)$ 内 $u\equiv 0$.

(3) 若在 $D\times\Gamma$ 内 u 具有界支集，则 $u\equiv 0$.

4. 柯西问题

考虑算子

$$Lu=\Delta_y u-\Delta_x u \quad 在\ R^n\times R^m,$$

这里 $n\geqslant 1$，$m\geqslant 1$，那末 L 可以是双曲的或超双曲的。我们将建立在大范围内对于形如方程

$$Lu=F(x,y,u) \tag{26}$$

的柯西问题的唯一性的定理。

定理 8 设 $L=\Delta_y-\Delta_x$，假定 w 是具有二阶微商且在 Ω 内具紧致支集 K 的函数，命 $\gamma=2-m-n$，则有数 β_0，当 $\beta>\beta_0$ 时，下面不等式成立：

$$\int_\Omega s^\gamma r^{\beta+2} e^{2r^{-\beta}}|Lu|^2 dxdy\geqslant$$

$$\geqslant 4\beta^2\int_\Omega s^\gamma r^{-2\beta-6}e^{2r^{-\beta}}w^2 dxdy, \tag{27}$$

这里 β_0 依赖于 m, n 且

$$r_+=\max_K r,\qquad s_-=\min_K s,$$

$\Omega=\left\{(x,y):\ |x|^2<|y|^2<|x|^2+1\right\}$，$|x|^2=x_1^2+\cdots+x_m^2$，$|y|^2=y_1^2+\cdots+y_n^2$，而这里

$$r^2=|x|^2-|y|^2+1,\qquad s^2=|y|^2-|x|^2.$$

证：命 $v=w\exp(r^{-\beta})$，$\beta>0$，则有

$$e^{r^{-\beta}}Lw=Lv-2\beta r^{-\beta-2}(y_k v_{y_k}+x_i v_{x_i})+$$

$$+\beta r^{-\beta-2}\left\{\beta r^{-\beta-2}s^2-(\beta+2)r^{-2}s^2-m-n\right\}v.$$

因此，

$$e^{2r^{-\beta}}|Lw|^2\geqslant 4\beta^2 r^{-2\beta-4}(y_k v_{y_k}+x_i v_{x_i})^2-$$

$$-4\beta r^{-\beta-2}(y_k v_{y_k}+x_i v_{x_i})Lv-$$

$$-4\beta^2 r^{-2\beta-4}(y_k v_{y_k}+x_i v_{x_i})\cdot$$

$$\cdot\left\{(\beta r^{-\beta}-\beta-2)r^{-2}s^2-m-n\right\}v,$$

以 $s^\gamma r^{\beta+2}(4\beta)^{-1}$ 乘上式并沿 Ω 积分，则有

$$(4\beta)^{-1}\int_\Omega s^\gamma r^{\beta+2}e^{2r^{-\beta}}|Lw|^2dxdy\geqslant I_1+I_2+I_3,$$

这里

$$I_1=\beta\int_\Omega s^\gamma r^{-\beta-2}(y_k v_{y_k}+x_i v_{x_i})^2dxdy,$$

$$I_2=-\int_\Omega s^\gamma(y_k v_{y_k}+x_i v_{x_i})Lvdxdy,$$

$$I_3=-\beta\int_\Omega s^\gamma r^{-\beta-2}\left\{(\beta r^{-\beta}-\beta-2)r^{-2}s^2-m-n\right\}$$

$$(y_k v_{y_k}+x_i v_{x_i})vdxdy.$$

在 I_2 中部分积分得

$$I_2=\gamma\int_\Omega s^{\gamma-2}(y_k v_{y_k}+x_i v_{x_i})^2dxdy.$$

显然，对充分大的 β 有

$$I_1+I_2=\int_\Omega\left\{\beta r^{-\beta-2}+\gamma s^{-2}\right\}s^\gamma\left\{y_k v_{y_k}+x_i v_{x_i}\right\}dxdy$$

是非负的，事实上，仅需 $\beta\geqslant-\gamma(s_-)^{-2}$ 即可。关于 I_3 可写成

$$I_3=I_{31}+I_{32}+I_{33},$$

在 I_3 的积分中，按 r 乘的顺序，作部分积分得

$$I_{31}=-\beta^2\int_\Omega r^{-2\beta-4}s^{\gamma+2}(y_k v_{y_k}+x_i v_{x_i})v dxdy=$$

$$=\beta^2\int_\Omega r^{-2\beta-6}s^{\gamma+2}\left\{1+\beta s^2\right\}v^2 dxdy,$$

$$I_{32}=\beta(\beta+2)\int_\Omega r^{-\beta-4}s^{\gamma+2}(y_k v_{y_k}+x_i v_{x_i})v dxdy=$$

$$=-\frac{1}{2}\beta(\beta+2)\int_\Omega r^{-\beta-6}s^{\gamma+2}\left\{4+\beta s^2\right\}v^2 dxdy,$$

$$I_{33}=\beta(m+n)\int_\Omega r^{-\beta-2}s^{\gamma}(y_k v_{y_k}+x_i v_{x_i})v dxdy=$$

$$=-\frac{1}{2}\beta(m+n)\int_\Omega r^{-\beta-4}s^{\gamma}(2+\beta s^2)v^2 dxdy.$$

因此

$$I_3=\beta\int_\Omega r^{-2\beta-6}s^{\gamma}v^2\varphi dxdy,$$

这里

$$\varphi=\beta s^2(1+\beta s^2)-\frac{1}{2}(\beta+2)r^{\beta}s^2(4+\beta s^2)-$$

$$-\frac{1}{2}(m+n)r^{\beta+2}(2+\beta s^2).$$

因为 $s_->0$，$r_+<1$（在K中），我们有

$$\varphi\geqslant\beta s_-^2(1+\beta s^2)-$$

$$-\frac{1}{2}r_+^{\beta}\left\{(\beta+2)(\beta+4)+(m+n)(\beta+2)\right\},$$

因此当 $\beta\to+\infty$时 $\varphi\to+\infty$. 于是对充分大的β，我们得在

K内有$\varphi\geqslant 1$. 因此

$$I_3\geqslant\beta\int_\Omega r^{-2\beta-6}s^\gamma v^2dxdy.$$

不等式I_1+I_2与I_3联立，立刻得到(27)。

假定(26)中的F连续且$F(x,y,p)$对p言满足一致李普希兹条件，若v是方程(26)的两个解之差，显然v应满足不等式

$$|Lv|\leqslant\Phi v. \tag{28}$$

定理 9 命Y是0与1间的常数，假定在集$\{|y|=Y\}\cap\Omega$上u与$\left(\frac{\partial u}{\partial n}\right)$为零，若$u$在$|y|\leqslant Y$满足(28)，则$u\equiv 0$.

证：在区域$|y|\geqslant Y$，假定u恒等于零，我们希望证明在Ω上u为零 。对充分小的$\varepsilon>0$，在0与1间定义光滑函数：

$$\chi(r)=\begin{cases}1, & 0<r\leqslant 1-2\varepsilon,\\ 0, & 1-\varepsilon<r<1.\end{cases}$$

在Ω中命$w=\chi(r)u$，那末w在集

$$K_\varepsilon=\left\{(x,y):\ (x,y)\in\Omega,\ |y|\leqslant Y,\ r\leqslant 1-\varepsilon\right\}$$

内有支集，则有

$$r_+=\max_{K_\varepsilon}(r)=1-\varepsilon,$$

$$s_-=\min_{K_\varepsilon}(s)=(\varepsilon(2-\varepsilon))^{\frac{1}{2}},$$

于是，

$$\int_{K_\varepsilon}s^\gamma r^{\beta+2}e^{2r-\beta}|Lw|^2dxdy\geqslant$$

$$\geqslant 4\beta^2\int_{K_\varepsilon} s^{\gamma} r^{-2\beta-6} e^{2r-\beta}|w|^2 dxdy \qquad (29)$$

命 $R=1-2\varepsilon$，那末 $K_\varepsilon=K_+\cup K_-$，这里

$$K_+=\left\{(x,y):\ (x,y)\in K_\varepsilon,\quad R>r\right\},$$

$$K_-=\left\{(x,y):\ (x,y)\in K_\varepsilon,\quad R\leqslant r\right\}.$$

于是在 K_- 内，$w=u$ 且

$$|Lw|=|Lu|\leqslant\Phi|u|,\ 在\ K_-\ 内,$$

对于充分大的 β，我们有

$$\int_{K_+} s^{\gamma} r^{\beta+2} e^{2r-\beta}|Lw|^2 dxdy\geqslant$$

$$\geqslant\int_{K_-}(4\beta^2 r^{-2\beta-6}-\Phi^2 r^{\beta+2})s^{\gamma}e^{2r-\beta}|u|^2 dxdy,$$

由(29)得

$$e^{2R-\beta}\int_{K_+} s^{\gamma}|Lw|^2 dxdy\geqslant$$

$$\geqslant e^{2R-\beta}(4\beta^2-\Phi^2)\int_{K_-} s^{\gamma}|u|^2 dxdy,$$

命 β 趋于∞，在 K_- 内则有 $u\equiv 0$，因为 ε 是任意的，于是在 K_0 中有 $u\equiv 0$.

附录　基本解——阿达玛方法

1. 基本解的定义

在定解问题的研究中，拉普拉斯双曲型方程曾经引出里曼函数；位势方程在三维的情形曾经提出函数$\frac{1}{r}$，$r=$ $=\sqrt{(x-x)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}$，在二维的情形曾提出$\ln r$；热导方程的讨论中，曾提出一个特别重要的特解$\frac{1}{\sqrt{y-\eta}}e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4(y-\eta)}}$，这些函数在解决定解问题过程中起着基本的作用。

立刻看出：这些函数都是动定两点的函数。同时看出，位势方程这种特解，若看作动点的函数，则以定点为奇点，而拉普拉斯双曲型方程的里曼函数却无这种性质。这种现象如何理解？实际上拉普拉斯双曲型方程的里曼函数并不是该方程的基本解，希尔伯特曾经指出该方程的基本解是

$$U\ln(x-x_0)(y-y_0)+W,$$

其中U是里曼函数，W是x,y的正则函数。所以里曼函数实际是基本解对数部分的系数。

这个事实，又引起了新的不一致处：拉普拉斯双曲型方程的基本解以过点(x_0,y_0)的二直线$x=x_0$，$y=y_0$为奇线而位势方程以定点为奇点，这又如何解释？实际上，

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=$$
$$=[(x-x_0)+i(y-y_0)][(x-x_0)-i(y-y_0)],$$

因此，二维位势方程的基本解以过点(x_0, y_0)的两条共轭虚线

$$x-x_0+i(y-y_0)=0,\quad x-x_0-i(y-y_0)=0$$

为其奇线，故在二维情形，线性偏微分方程的基本解有低一维的奇线。高维的情形也是这样，即m个变数的二阶线性偏微分方程的基本解应该有 $m-1$ 维奇流形。

问题就在定这种 $m-1$ 维奇流形。

德拉须斯定理 设线性偏微分方程

$$F(u)\equiv\sum_{i,k=1}^{m}A_{ik}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\partial x_k}+\sum_{i=1}^{m}B_i\frac{\partial u}{\partial x_i}+Cu=0 \quad (1)$$

的系数在域D内是正规的，若在D内为正规的曲面S是方程(1)的解在D内的奇面，则S必是(1)的特征面。

证：设S的方程是$G=0$，并假定(1)的解u以$G=0$为代数性的奇面，即$u=UG^p$，其中U在D内是正规的，p是使$G=0$为G^p的奇面的常数。则

$$F(UG^p)=p(p-1)G^{p-2}U\cdot\mathscr{A}+$$
$$+pG^{p-1}\left[\Sigma_i\frac{\partial U}{\partial x_i}\ \frac{\partial\mathscr{A}}{\partial\pi_i}+MU\right]+G^pF(U),\quad (1')$$

其中 $M=F(G)-CG$. $\mathscr{A}$为(1)的特征二次式。

p既不能等于零或1，则要$F(UG^p)$是正规的，首先必须

$$\mathscr{A}|_{G=0}=0,$$

如是则有$\mathscr{A}=A_1G$，其中A_1当$G=0$时正规。

要$F(UG^p)$是正规的，又必需

$$\sum_i\frac{\partial U}{\partial x_i}\ \frac{\partial\mathscr{A}}{\partial\pi_i}+[M+(p-1)A_1]U\Big|_{G=0}=0,$$

这对U说，是线性一阶偏微分方程，它的解决，又有待于次特征线的求出。

这里假定了 u 的奇面的代数性质，勒胡经过主积分的概念证明了上述定理，不必对 u 的奇面的性质加任何假定。

通过上面的讨论，对基本解可作如下定义：

基本解应该是伴随方程的解，它是 m 维空间动定两点的函数，它以过定点的特征面为奇面，而这个特征面又以定点为其锥点。

这种特征面称特征角面。

2. **特征角面**

根据下列早为庞纳后来又为达布所发现的事实：经过 m 维空间一定点 $(x_1^0, x_2^0, \cdots, x_m^0)$ 的一阶偏微分方程的特征线的轨迹是微分方程的积分曲面，这个积分曲面以这定点为锥点；求特征角面的问题就变为解下列常微分方程组的定解问题：

$$\begin{cases} \dfrac{dx_i}{ds}=\dfrac{1}{2}\dfrac{\partial \mathscr{A}}{\partial \pi_i}, \quad \dfrac{d\pi_i}{ds}=-\dfrac{1}{2}\dfrac{\partial \mathscr{A}}{\partial x_i}, \quad \dfrac{dG}{ds}=\mathscr{A}, \\ \qquad\qquad i=1,2,\cdots,m \\ x_i(0)=a_i, \quad \pi_i(0)=\pi_{oi}, \quad G(0)=G_0, \end{cases} \tag{2}$$

其中 s 是自变数，a_i 是常数，π_{oi} 是满足条件

$$\sum_{i,k=1}^{m} A_{ik}(a_1,a_2,\cdots a_m)\pi_{oi}\pi_{ok}=0$$

的参变数，另一条件

$$dG_0-\sum_{i=1}^{m}\pi_{oi}da_i=0$$

天然满足。

在(2)的泛定方程中，把 s 换为 αs，同时把 π_i, π_{oi} 换为 π_i/α，π_{oi}/α，α 是常数，则方程和定解条件仍都不变。所以若(2)的解是

$$x_i=\Phi_i(s,\pi_{o1},\cdots,\pi_{om};\ a_1,a_2,\cdots,a_m),$$
$$i=1,2,\cdots,m$$
$$\pi_i=\psi_i(s,\pi_{o1},\cdots,\pi_{om};\ a_1,a_2,\cdots,a_m),$$

则我们将也有

$$x_i=\Phi_i\left(\alpha s,\ \frac{\pi_{o1}}{\alpha},\ \cdots,\ \frac{\pi_{om}}{\alpha};\ a_1,a_2,\cdots,a_m),\ \right),$$
$$i=1,2,\cdots,m,$$
$$\pi_i=\alpha\psi_i\left(\alpha s,\ \frac{\pi_{o1}}{\alpha},\ \cdots,\ \frac{\pi_{om}}{\alpha};\ a_1,a_2,\cdots,a_m\ \right),$$

这表示(2)的解一定可以写成

$$x_i=\varphi_i(s\pi_{o1},\cdots,s\pi_{om};\ a_1,a_2,\cdots,a_m), \tag{3}$$
$$s\pi_i=\psi_i(s\pi_{o1},\cdots,s\pi_{om};\ a_1,a_2,\cdots,a_m), \tag{4}$$

由常微分方程积分性质，我们又有

$$a_i=\varphi_i(-s\pi_1,\cdots,-s\pi_m;\ x_1,x_2,\cdots,x_m), \tag{5}$$
$$-s\pi_{oi}=\psi_i(-s\pi_1,\cdots,-s\pi_m;\ x_1,x_2,\cdots,x_m), \tag{6}$$

因

$$\left(\frac{dx}{ds}\right)_0=\frac{1}{2}\ \frac{\partial\mathscr{A}}{\partial\pi_{oi}},$$

故 x_i-a_i以$\frac{1}{2}\ \frac{\partial\mathscr{A}}{\partial(s\pi_{oi})}$（这里$\mathscr{A}\equiv\Sigma A_{ik}(s\pi_{oi})(s\pi_{ok})$）为展开式的一次项。因此行列式

$$J=\frac{D(x_1,x_2,\cdots,x_m)}{D(s\pi_{o1},s\pi_{o2},\cdots,s\pi_{om})}$$

在$(a_1,a_2,\cdots,a_m)$处之值就是$\mathscr{A}$的判别式Δ在该点处之值。假定Δ在$(a_1,a_2,\cdots,a_m)$处不为零，那末，J在$(a_1,a_2,\cdots,a_m)$处便不为零，所以从(3)可以解出$s\pi_{oi}$；$s\pi_{oi}$就是x_i和a_i的函数。命

$$s\pi_{oi}=\overline{\varphi}_i(x_1,x_2,\cdots,x_m;\ a_1,a_2,\cdots,a_m),$$

同理由(5)有

$$s\pi_i=-\overline{\varphi}_i(a_1,a,\cdots,a_m;\ x_1,x_2,\cdots x_m).$$

有了上述的讨论，我们就可以构造函数

$$\Gamma\equiv\mathscr{A}(s\pi_1,\cdots,s\pi_m;\ x_1,\cdots,x_m)=$$
$$=\mathscr{A}(\overline{\varphi}(a_1,\cdots,a_m;\ x_1,\cdots,x_m),\cdots,\overline{\varphi}_m;\ x_1,x_2,\cdots,x_m)=$$
$$=\sum_{i,k=1}^{m}A_{ik}(x_1,x_2,\cdots,x_m)\overline{\varphi}_i(a_1,a_2,\cdots,a_m;x_1,\cdots x_m)\times$$
$$\times\overline{\varphi}_k(a_1,\cdots,a_m;\ x_1,\cdots,x_m)=$$
$$=\sum_{i,k=1}^{m}A_{ik}(a_1,a_2,\cdots,a_m\overline{\varphi}_i)(x_1,\cdots x_m;\ a_1,\cdots,a_m)\times$$
$$\times\overline{\varphi}_k(x_1,\cdots,x_m;\ a_1,\cdots,a_m)=$$
$$=\mathscr{A}(s\pi_{o1},\cdots,s\pi_{om};\ a_1,\cdots,a_m).$$

这是 $s\pi_{oi}$ 的常系数二次式， 也可以看作是 x_i 的解析函数。Γ 是两点$(x_1,x_2,\cdots,x_m)$和$(a_1,a_2,\cdots a_m)$的对称函数。

下面来说明函数Γ的几何意义。

设 $H(dx_1,\cdots,dx_m)=\sum_{i,k=1}^{m}H_{ik}(x_1,\cdots,x_m)dx_idx_k$

是

$$\mathscr{A}(dx_1,\cdots,dx_m)=\sum_{i,k=1}^{m}A_{ik}dx_idx_k$$

的反二次式(即$(H_{ik})=(A_{ik})^{-1}$)，考虑该怎样取 $x_i(t)$,积分

$$\mathscr{L}=\int_0^s\sqrt{H\left(\frac{dx_1}{ds},\ \cdots,\ \frac{dx_m}{ds}\right)}ds$$

的变分才为零？以后把$\frac{dx_i}{ds}$改写为 x_i'，这时

$$x_i=x_i(s),\qquad i=1,2,\cdots,m$$

称为以 $H(dx_1,\cdots,dx_m)$为线性元素的空间的测地线，而$\mathscr{L}$在

$(0,s)$内的值称为$[x_1(0),\ x_2(0),\ \cdots,\ x_m(0)]$和$[x_1(s),\ \cdots,\ x_m(s)]$两点间的测地距离。

因在$(a_1,a_2,\cdots,a_m)$附近，我们近似地有

$$x_i-a_i=\frac{1}{2}\ \frac{\partial\mathscr{A}}{\partial(s\pi_{oi})},$$

所以在该点附近有

$$\Gamma=H_0(x_1-a_1,\cdots,x_m-a_m)+\cdots,\tag{7}$$

由变分学有

$$\delta\mathscr{L}=\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial\sqrt{H}}{\partial x_i'}\delta x_i\Big|_{s=0}^{s}+$$
$$+\int_0^s\sum_{i=1}^{m}\left[\frac{\partial\sqrt{H}}{\partial x_i}-\frac{d}{ds}\ \frac{\partial\sqrt{H}}{\partial x_i'}\right]\delta x_i ds,\tag{8}$$

而欧拉方程是

$$\frac{d}{ds}\left(\frac{\partial\sqrt{H}}{\partial x_i'}\right)-\frac{\partial\sqrt{H}}{\partial x_i}=0,\quad i=1,2,\cdots m,\tag{9}$$

要解(9)，我们先解

$$\frac{d}{ds}\ \frac{\partial H}{\partial x_i'}-\frac{\partial H}{\partial x_i}=0,\quad i=1,2,\cdots,m,\tag{10}$$

这是一组二阶常微分方程。

引进安培变换:

$$\frac{1}{2}\ \frac{\partial H}{\partial x_i'}=\pi_i,\quad i=1,2,\cdots,m,$$

则有

$$\mathscr{A}=\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial H}{\partial x_i'}x_i'-H=H,$$

这样，(10)化为

$$\frac{dx_i}{ds}=\frac{1}{2}\ \frac{\partial\mathscr{A}}{\partial\pi_i},\quad \frac{d\pi_i}{ds}=\frac{1}{2}\ \frac{\partial H}{\partial x_i}=-\frac{1}{2}\ \frac{\partial\mathscr{A}}{\partial x_i}.$$

事实上，

$$d\mathscr{A}=\sum_{i=1}^{m}\left(\frac{\partial H}{\partial x_i'}dx_i'+x_i'd\frac{\partial H}{\partial x_i'}\right)-$$

$$-\sum_{i=1}^{m}\left(\frac{\partial H}{\partial x_i'}dx_i'+\frac{\partial H}{\partial x_i}dx_i\right)=$$

$$=\sum_{i=1}^{m}\left(2x_i'd\pi_i-\frac{\partial H}{\partial x_i}dx_i\right),$$

故得

$$\frac{\partial H}{\partial x_i}=-\frac{\partial \mathscr{A}}{\partial x_i}. \tag{11}$$

反之，若 $x_i, s\pi_i$ 是(9)，(10)所定义的(2)的解，则(9)所定义的 x_i 便是(10)的解。

在次特征线上（见吴新谋等，数学物理方程，第二册，特征理论）H 与 s 无关，事实上，

$$\frac{d\mathscr{A}}{ds}=\sum\left(\frac{\partial \mathscr{A}}{\partial x_i}\frac{dx_i}{ds}+\frac{\partial \mathscr{A}}{\partial \pi_i}\frac{d\pi_i}{ds}\right)=0.$$

所以有

$$\frac{d}{ds}\left(\frac{\partial\sqrt{H}}{\partial x_i'}\right)-\frac{\partial\sqrt{H}}{\partial x_i}=\frac{1}{2}\left[\frac{d}{ds}\left(\frac{\partial H}{\partial x_i'}\right)-\frac{\partial H}{\partial x_i}\right]=0.$$

因此，在以 $\sum_{i,k=1}^{m} H_{ik}(x_1, \cdots, x_m)\, dx_i dx_k$ 为线性元素的空间里，Γ 是两点$(x_1, x_2, \cdots, x_m)$，$(a_1, a_2, \cdots, a_m)$间测地距离的平方，这是由于

$$\mathscr{L}^2=(\sqrt{H}s)^2=Hs^2=\mathscr{A}s^2=\Gamma.$$

由(8)有

$$\delta\sqrt{\Gamma}=\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial\sqrt{H}}{\partial x_i'}\delta x_i=\sum_{i=1}^{m}\frac{\pi_i\delta x_i}{\sqrt{H(x_i')}},$$

所以

$$\frac{\partial\sqrt{\Gamma}}{\partial x_i}=\frac{\pi_i}{\sqrt{H(x_i')}}=\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{\Gamma}}\frac{\partial\Gamma}{\partial x_i},$$

故

$$\frac{\partial\Gamma}{\partial x_i}=\frac{2\pi_i\sqrt{\Gamma}}{\sqrt{H(x_i')}}=2s\pi_i,\quad (i=1,2,\cdots,m). \tag{12}$$

因之Γ适合一阶偏微分方程

$$\mathscr{A}\left(\frac{\partial\Gamma}{\partial x_i};\ x_i\right)=4\Gamma. \tag{13}$$

这和德拉须斯定理一致。在这里我们有$A_1=4$。

$\Gamma=0$就是我们所要求的特征角面的方程式。

例 求超双曲型方程

$$\sum_{i=1}^{p}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}-\sum_{j=1}^{q}\frac{\partial^2 u}{\partial y_j^2}=0$$

的特征角面。

这个方程的特征二次式是

$$\mathscr{A}=\sum_{i=1}^{p}\pi_i^2-\sum_{j=1}^{q}\pi_j^2,$$

次特征线的方程是

$$\frac{dx_i}{\pi_i}=\frac{dy_j}{-\pi_j}=-\frac{d\pi_i}{0}=-\frac{d\pi_j}{0}=ds,$$

故

$$\begin{cases} x_i=a_i+\pi_{oi}s, \\ y_j=a_j-\pi_{oj}s, \\ \pi_i=\pi_{oi},\quad \pi_j=\pi_{oj}, \end{cases}$$

$$\Gamma=\sum_{i=1}^{p}(x_i-a_i)^2-\sum_{j=1}^{q}(y_j-a_j)^2=0,$$

这就是原方程式的特征角面。

3. 基本解的求法

我们求(1)的是

$$u=\Gamma^{p}\sum_{h=0}^{\infty}U_{h}\Gamma^{h} \tag{14}$$

形的解，其中 p 是常数，由(1′)有

$$F(u)\equiv\sum_{h=0}^{\infty}F(U_{h}\Gamma^{p+h})=$$

$$=\sum_{h=0}^{\infty}\Big\{(p+h)(p+h-1)\Gamma^{p+h-2}U_{h}\cdot\mathscr{A}+$$

$$+(p+h)\,\Gamma^{p+h-1}\Big[\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial U_{h}}{\partial x_{i}}\frac{\partial\mathscr{A}}{\partial\pi_{i}}+MU_{h}\Big]$$

$$+\Gamma^{p+h}F(U_{h})\Big\}=0,$$

但 $\mathscr{A}=4\Gamma$，所以应有

$$\sum_{h=0}^{\infty}\Big\{(p+h)\,\Gamma^{p+h-1}\Big[\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial U_{h}}{\partial x_{i}}\frac{\partial\mathscr{A}}{\partial\pi_{i}}+$$

$$+(M+4(p+h-1))U_{h}\Big]+\Gamma^{p+h}F(U_{h})\Big\}=0,$$

即

$$p\Gamma^{p-1}\Big[\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial U_{0}}{\partial x_{i}}\frac{\partial\mathscr{A}}{\partial\pi_{i}}+(M+4(p-1))U_{0}\Big]+$$

$$+\sum_{h=0}^{\infty}\Gamma^{p+h}\Big\{(p+h+1)\Big[\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial U_{h+1}}{\partial x_{i}}\frac{\partial\mathscr{A}}{\partial\pi_{i}}+$$

$$+(M+4(p+h))U_{h+1}\Big]+F(U_{h})\Big\}=0.$$

所以就必需有

$$\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial U_{0}}{\partial x_{i}}\frac{\partial\mathscr{A}}{\partial\pi_{i}}+[M+4(p-1)]U_{0}=0, \tag{15}$$

$$(p+h+1)\left[\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial U_{h+1}}{\partial x_i}\frac{\partial \mathscr{A}}{\partial \pi_i}+(M+4(p+h))U_{h+1}\right]$$

$$+F(U_h)=0, \qquad h=0,1,2,\cdots \tag{16}$$

要解(15)，需要解决常微分方程组

$$\frac{dx_i}{\dfrac{1}{2}\dfrac{\partial \mathscr{A}}{\partial \pi_i}}=\frac{-dU_0}{\left[\dfrac{M}{2}+2(p-1)\right]U_0}, \tag{17}$$

其中 π_i 应代为$\dfrac{\partial \Gamma}{\partial x_i}$即 $2s\pi_i$，因之若取

$$x_i=\varphi_i(s\pi_{o1},\cdots,s\pi_{om};\ a_1,\cdots,a_m) \tag{3}$$

则(17)就变为

$$\frac{dU_0}{-\left[\dfrac{M}{2}+2(p-1)\right]U_0}=\frac{ds}{2s},$$

而有

$$U_0=Ce^{-\int_0^s\frac{\left[\frac{M}{2}+2(p-1)\right]ds}{2s}}, \tag{18}$$

其中 C 是常数。

首先看一下，当 p 是怎样的常数时，U_0才是正则的，这就首先要看一下M在 $s=0$ 附近的情况。

由(7)我们有

$$\frac{\partial^2 \Gamma}{\partial x_i \partial x_k}=2H_{ik}(a_1,\cdots,a_m)+\cdots,$$

$$\left.\frac{\partial \Gamma}{\partial x_i}\right|_{s=0}=0,$$

所以在 $s=0$ 附近

$$M=2\sum_{i,k=1}^{m}A_{ik}H_{ik}+\cdots=2m+\cdots.$$

因之要 U_0 是正则的，必需 $-\frac{m}{2}-p+1$ 是正整数 p_1.

我们只暂考虑 $p_1=0$ 的情况，就是说，我们已取定 $p=-\frac{m}{2}+1$.

按照线性一阶偏微分方程的理论，我们应该在 M 内把 x_i 代为 φ_i[公式(3)]，然后由(18)求出 U_0 得

$$U_0=U_0(s,s\pi_{o1},\cdots,s\pi_{om};\ a_1,\cdots,a_m),\qquad(19)$$

最后由(3)，(19)和

$$\sum_{i,k=1}^{m}A_{ik}(a_1,\cdots,a_m)\pi_{oi}\pi_{ok}=0$$

消去 $s,\pi_{o1},\cdots,\pi_{om}$ 就得 U_0 是 $x_1,\cdots,x_m;\ a_1,\cdots,a_m$ 的函数。

这个 U_0 就是(15)的积分，这里情形也较简单，因为

$$U_0(s,\pi_{o1},\cdots,\pi_{om};\ a_1,\cdots,a_m)$$

显然可以写为

$$U_0(s\pi_{o1},\cdots,s\pi_{om};\ a_1,\cdots,a_m)$$

命

$$-\left[\frac{M}{2}+2(p-1)\right]=\sum_{i=1}^{\infty}Q_i(s\pi_{o1},\cdots,s\pi_{om};\ a_1,\cdots,a_m),$$

其中 Q_i 是 $s\pi_{o1},\cdots,s\pi_{om}$ 的纯 i 次多项式，则

$$-\left[\frac{M}{2}+2(p-1)\right]\frac{1}{2s}=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{s^{i-1}}{2}Q_i(\pi_{o1},\cdots,\pi_{om};\ a_1,\cdots,a_m),$$

而

$$-\int_0^s\frac{\frac{M}{2}+2(p-1)}{2s}ds=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{s^iQ_i(\pi_{o1},\cdots,\pi_{om};\ a_1,\cdots,a_m)}{2i}=$$

$$=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{Q_i(s\pi_{o1},\cdots,s\pi_{om};\ a_1,\cdots,a_m)}{2i}.$$

所以由 $s\pi_{ai}=-\varphi_i(a_1,\cdots,a_m;\ x_1,\cdots x_m)$ 得

$$U_0=Ce^{\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{2i}Q_i(-\varphi_1,\cdots,-\varphi_m;\ a_1,\cdots,a_n)}$$

是 $x_1,\cdots,x_m;\ a_1,\cdots,a_m$ 的正则函数，并且 U_0 适合(15)。

设当 $s=0$ 时 $U_0=\dfrac{1}{\sqrt{|\Delta_a|}}$，其中 Δ_a 是 $\mathscr{A}$ 的判别式在$(a_1,\cdots,a_m)$处的值，则有

$$U_0=\frac{1}{\sqrt{|\Delta_a|}}e^{-\int_0^s\left(\frac{M}{2}+2p-2\right)\frac{ds}{2s}}. \tag{20}$$

设 U_h 是$(x_1,\cdots,x_m;a_1,\cdots,a_m)$的正则函数，容易证明：由(16)定出的 U_{h+1} 将也是$(x_1,\cdots,x_m;\ a_1,\cdots,a_m)$的正则函数。

这样所有(14)内的 U_h 都能逐次求得。

(14)右端的级数也可证明是收敛的。而且收敛性也将是一致的。

所以，若 m 是奇数，则(14)所代表的函数，就是(1)的基本解。

现在考虑 m 是偶数的情形。这时 p 就是负整数，呈(14)形的基本解不存在。受比卡对

$$\frac{\partial^2u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2u}{\partial y^2}+A\frac{\partial u}{\partial x}+B\frac{\partial u}{\partial y}+Cu=0$$

的基本解求法的启示，命

$$u=U\Gamma^p-\mathscr{U}\Gamma^q\log\Gamma,$$

其中 q 是常数，则(1)变为

$$F(U\Gamma^p)-\left[\sum\frac{\partial(\mathscr{U}\Gamma^q)}{\partial x_i}\frac{\partial\mathscr{A}}{\partial\pi_i}+(M-4)\mathscr{U}\Gamma^q\right]\frac{1}{\Gamma}-$$

$$-F(\mathscr{U}\Gamma^q)\log\Gamma=0.$$

所以非 $\mathscr{U}\Gamma^q$ 自己是(1)的解不可，但我们已知呈这种形式的解不存在。因之，必须命 $q=0$，而(1)成为

$$F(U\Gamma^p)-\Big[\sum\frac{\partial\mathscr{U}}{\partial x_i}\ \frac{\partial\mathscr{A}}{\partial\pi_i}+(M-4)\,\mathscr{U}\Big]\frac{1}{\Gamma}-$$

$$-F(\mathscr{U})\log\Gamma=0. \qquad (21)$$

这时必须取 $\mathscr{U}$ 是(1)的解。

在这种情形下，当 $h<-p-1$ 时，(16)仍成立，当 $h=-p-1$ 时，(16)变成

$$\Big[\sum\frac{\partial\mathscr{U}}{\partial x_i}\ \frac{\partial\mathscr{A}}{\partial\pi_i}+\ (M-4)\mathscr{U}\ \Big]-F(U_{-p-1})=0 \quad (22)$$

这个方程应在 $\Gamma=0$ 上成立。命 $\mathscr{U}_0$ 是(22)的解，则所要求的 $\mathscr{U}$ 是第一问题

$$\begin{cases} F(\mathscr{U})=0, \\ \mathscr{U}=\mathscr{U}_0, \text{ 在 } \Gamma=0 \end{cases}$$

的解。这问题一定有解。

这样，在(1)中命

$$u=-\mathscr{U}\log\Gamma+\Gamma^p\sum_{h=0}^{-p-1}U_h\Gamma,$$

则在 $F(u)$中所有 Γ^{p-1}, Γ^p, …, Γ^{-1} 和 $\log\Gamma$ 的系数都将为零。因此这个代入运算的结果将是一个正则函数$\mathscr{M}$，我们只须定$\mathscr{W}$使

$$F(\mathscr{W})=-\mathscr{M},$$

就能得(1)的解：

$$u=-\mathscr{U}\log\Gamma+U\Gamma^p,$$

其中

$$U=\mathscr{W}\Gamma^{-p}+\sum_{h=0}^{-p-1}U_h\Gamma^h.$$

u 是(1)的基本解。

这时(1)的基本解有很大的不定性，因为 $\mathscr{W}$ 的选择是任意的。

总之，一个含 m 个自变数的解析的非抛物型的线性二阶偏微分方程(1)恒有一基本解，这基本解以 m 维空间内任一定点 $(a_1, \cdots, a_m)$ 为极。

若 m 是奇数，则这个基本解呈

$$\frac{U}{\Gamma^{\frac{m-2}{2}}}$$

形，其中 U 适合条件

$$U = \frac{1}{\sqrt{|\Delta_a|}} \quad \text{在} \ \Gamma = 0 \ \text{上}。$$

若 m 是偶数，则基本解呈

$$\frac{U}{\Gamma^{\frac{m-2}{2}}} - \mathscr{U} \log \Gamma$$

形，$\mathscr{U}$ 是(1)的解。

上述推理中，一贯地避免谈抛物型，但我们仍可把一个抛物型方程看成是一个椭圆型方程或双曲型方程的极限情形，因之而求得它的基本解。例如可以把

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \qquad (23)$$

看作是双曲型方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - K \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \qquad (24)$$

的极限情形：当 $K \to 0$ 时的极限，作代换

$$y = Y, \qquad x - \frac{y}{K} = X,$$

(24)变为

$$K\frac{\partial^2 u}{\partial X\partial Y}+\frac{1}{K}\frac{\partial u}{\partial X}-\frac{\partial u}{\partial Y}=0,$$

这方程的里曼函数是

$$J_0\left[2\sqrt{\frac{(X-X_0)(Y-Y_0)}{K^3}}\exp\left(\frac{X-X_0}{K}-\frac{Y-Y_0}{K^2}\right)\right],$$

其中 $J_0(\xi)$是贝塞尔函数，返回原来变元有

$$J_0\left[\frac{2}{K^2}\sqrt{(y-y_0)[K(x-x_0)-y+y_0]}\right]\cdot$$

$$\cdot\exp\left(\frac{x-x_0}{K}-\frac{2(y-y_0)}{K^2}\right),$$

当K趋于零时，有

$$J_0(i\eta)\sim\frac{e^\eta}{\sqrt{2\pi\eta}}.$$

在我们这里有

$$\eta=\frac{2y}{K^2}-\frac{x}{K}-\frac{x^2}{4y}+\cdots,$$

所以要求的里曼函数就近似地是

$$\frac{K}{\sqrt{4\pi}}\frac{1}{\sqrt{y}}e^{-\frac{x^2}{4y}},$$

这和(23)的理论里引进的基本解只差一个因子$\frac{K}{\sqrt{4\pi}}$，这个因子当把它代入里曼公式时，自然地就被方程式的系数所消去。

例 求超双曲型方程

$$\Delta^{p,q}u=\sum_{i=1}^{p}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}-\sum_{j=1}^{q}\frac{\partial^2 u}{\partial y_j^2}=0,\quad (p,q\geqslant 2)$$

的基本解。

解：在这里

$$\Gamma=\sum_{i=1}^{p}(x_i-a_i)^2-\sum_{j=1}^{q}(y_j-a_j)^2,$$

故

$$M=2(p+q)\equiv 2m,$$

$$U_0=\text{常数},\ U_h=0,\ h=1,2,\cdots$$

所以 $\Delta^{p,q}u=0$ 的基本解是 $\Gamma^{\frac{2-m}{2}}$.

参 考 文 献

[1] Asgeirsson, Leifur: Beweis des Maclaurinschen Satzes über die Anziehung homogener konforkaler Ellipsoid, unit Hilfe eiues Satzes über die Lösungeon der partiellen Differentialgleichung

$$\sum_{i=1}^{n} U_{\xi_i \xi_i} - \sum_{i=1}^{n} U_{\eta_i \eta_i} = 0$$

(Stockholm, Sitzg. V., 14-18 VIII 1934) 8. Skand Mat. Kongr., 389-391 (1935).

[2] Asgeirsson, Leifur: über eine Mittelwertseigenschaft von Lösungen homegener linearer partieller Differentialgleichungen 2. Ordnung konstanten Koeffizienten. Math. Ann. 113, 321-346 (1937).

[3] Lewy, Hans., Extension of Huyghens principle to the ultrahyperbolic equation. Ann. Mat. Pura Appl. (4), 39 (1955), 63-64.

[4] 吴新谋等 数学物理方程 第二册 (1958) 科学出版社。

[5] 吴新谋 关于超双曲型方程一个恒等式 «超双曲型方程文选» 5-10,西北大学。

[6] 凌 岭、耿 光 超双曲型方程的基本解与 As-

geirsson 定理 数学学报 26 卷 1 期 (1983).
[7] Piskunov, N. S., On the characteristic problem for equation of ultrahyperbolic type. Doklody Akad. Nauk. SSSR (N. S.) 59, 439-442 (1948).
[8] A. C. Благовещснский, О некоторых корркных задачах для ультрагипеболического и волнового уравнений с данными на характертитеском конусе Д. А. Н. СССР. 1961. Т. 140, № 5.
[9] 凌 岭 超双曲型方程特征问题的一个注记 数学学报 27 卷 4 期 (1984).
[10] Blagovescenskii, A. S., The characteristic problem for ultrahyperbolic equation. Mat. sb. (N. S.) 63 (105) (1964). 137-168.
[11] Blagovescenskii, A. S., An ultrahyperbolic equation with data given on a characteristic surface Vestnik Leningrad. Uuiv. 20 (1965), № 13, 13-19.
[12] Owens. O. G. Homogeneous Dirichlet problem for inhomogeneous ultrahyperbolic equation. Amer. J. Math. 74, 307-318, (1952).
[13] Owens, O. G., A boundary-value problem for analytic solutions of an ultrahyperbolic equation. Duke Math. J. 21, 29-44 (1954).
[14] John, Fritz: The ultrahyperbolic differen-

tial equation with four independent variables. Duke Math. J. 4, 300-322 (1958).

[15] Owens. Glynn., An explicit formula for the solution of the ultrahyperbolic equation in four independent variables. Duke Math. J. 9, 272-282 (1942).

[16] Nef, Walter., Funktionentheorie einer Klasse von hyperbolischen und ultrahyperbolischen differentialgliechungen zweiter ordnung. Comment. Math. Helv. 17, 83-107 (1945).

[17] Owens, O. G., Uniqueness of solutions of ultrahyperbolic partial differential equations. Amer. J. Math. 69, 184-188 (1947).

[18] Owens, O. G., An ultra-hyperbolic equation with an integral condition. Amer. J. Math. 82 (1960), 799-811.

[19] Dezin, A. A., The simplest solvable extensions for ultra-hyperbolic aud Pseudo-Parabolic operators. Dokl. Akad. Nauk. SSSR 148 (1963) 1013-1016.

[20] 凌 岭、耿 光、朱 钤 超双曲型方程广义势解的非解析性与拓展性，科学通报 28 卷 17 期 (1983).

[21] Galonen, L. M., On functionally invariant Solutions of second order of ultrahyperbolic type. Rostov. Gos. Univ. Ue Zap. Fiz-Mat.

Fak. 32 (1955), 179-182, (Russian).

[22] Smirnov, G. P., A certain Well-Posed boundary value problem for ultrahyperbolic equation. Boškir Gos. Univ. Učen. Zap. Vyp. 31 (1968), Ser. Mat. № 3, 322-325.

[23] Owens, O. G., An integral solution of an ultrahyperbolic equation. Duke. Math. J. 36, (1969) 253-265.

[24] Owens, O. G. Dressler, R. F., An integral solution of a damped ultrahyperbolic equation. Studies and Essays (Presented to Yu-why Chen on his 60th Birthday, April 1, 1970), pp. 165-168, Math. Res. center, Nat. Taiwan Univ. Taipie 1970.

[25] Bureau, Florent, Problemes Correctsment poses pour une equation lineaire aux derivees partielles ultrahyperbolique. C. R. Acad. Sci. Paris 248 (1959).

[26] Foures-Bruhat, Yvoune., Solution élémentaire d'equations ultrahyperboliques. C. R. Acad. Paris 240, 395-396 (1955).

[27] Foures-Bruhat, Y., Solution élémentaire d'equatious ultra-hyperboliques. J. Math. pures Appl. (9) 35, (1956), 277-288.

[28] Foures-Bruhat, Y., Solution élémentaire d'equation ultra-hyperboliques a Coefficienis

variables. C. R. Acad. Sci. Paris 242 (1956), 1566-1568.

[29] Rhan, Georges de: Solution élémentaire d'Operateurs differentials du second ordre. Ann. Inst. Fouriers, 337-366 (1959).

[30] Sakuma, Kyuihi., On the fundamental solutions of ultra-hyperbolic Operators. Sǔgake 12. (1960/61) 107-110.

[31] Berezanshie, Yu. M., On an operator derived from an ultrahyperbolic differential expression, Ukrain, Mat. Z. Vol. 11, 315-321, 1959.

[32] Murray, A. C. Protter, M. H., Asymptotic behavior and the Cauchy problem for ultrahyperbolic operator. Indiana Univ. Math. J. 24 (1974/75) 115-130.

[33] Protter, M. H., Asymptotic decay for ultrahyperbolic operators. Contributions to analysis (a collection of papers dedicate to Lipman Bers) pp. 351-355. Academic press, New York, 1974.

[34] Ogawa, Hazinmu., Energy decay for solution of ultrahyperbolic inequlities, J. Diff, Equa. 34 (1979).

[35] Travis, C. C. Young, E. C., Comparison theorems for ultrahyperbolic equation. Interat,

J. Math, Sci 1 (1978) No. 1 31-40.

[36] Narita, Memoru, Oscillation theorems for simehyperbolic and ultrahyperbolic operator, Bull. Austral, Math. soc. 18 (1978), No. 1 55-64.

人 名 对 照 表

Abel	亚倍尔
Asgeirsson	阿斯盖生
Ampére	安培
Bessel	贝塞尔
Bonnet	庞纳
Cauchy	柯西
Courant-Hilbert	柯朗-希尔伯特
Darboux	达布
Dirac	狄拉克
Dirichlet	狄立克雷
Delassus	德拉须斯
Euler-Poisson	欧拉-波阿松
Florent Bureau	弗劳伦兹贝罗
Fourier	付里哀
Fuchs	傅克斯
Gauss	高斯
Green	格林
Hadamard	阿达玛
Hammerstein	哈麦斯坦
Helmholtz	亥姆霍兹
Hölder	霍尔德
Laplace	拉普拉斯

Lewy	列维
Lorentz	罗伦兹
Le Roux	勒胡
Олевский	阿列夫斯基
Picard	比卡
Ricatti	黎加梯
Riemann	里曼
Schauder	肖特
Schwarz	舒瓦兹
Соболев	索伯列夫
Taylor	泰勒
Volterra	伏特拉